COLLECTION

πxel

PIXEL

MATHS

ÉDITION 2008

Term S

SPÉCIALITÉ

Des exercices corrigés repérés par www. sur www.bordas-pixel.fr/TleS

Bordas

COLLECTION πxel PIXEL

MATHS

ÉDITION 2008

TERM S

SPÉCIALITÉ

Sous la direction de
Jean-Pierre Bouvier

Patricia Boivin
Pierre Cauty
Jacques Chadenas
Guillaume Dujardin
Jean-Louis Grassi
Denis Legendre
Horst Lottermoser
Jean-Pierre Manceau
Tristan Poullaouec
Patrice Roger

Nous dédions ce livre à Thomas Chabirand

Bordas

Crédits photographiques

p 5 : ph. © Laurent Douek/LookatSciences
p 41 : ph. © Sandro Vannini/Corbis
p 42 h : ph. © The Granger Collection/Rue des Archives
p 42 b : ph. © MP/Leemage
p 43 h : ph. © Suddeutsche Zeitung/Rue des Archives
p 43 b : ph. © Kim Kulish/Corbis
p 69 : ph. © Zoran/Photononstop
p 103 : ph. © Paul Bahn/LookatSciences
p 105 : ph. © DR

Les auteurs et l'éditeur tiennent à remercier tout particulièrement
Céline Chevalier pour la rigueur de ses relectures
et ses conseils avisés.

Édition : Julien Lionnet
Fabrication : Jean-Philippe Dore
Conception de la maquette et couverture : Fred Jely
Compogravure : Nord Compo
Iconographie : Laure Bacchetta
Coordination artistique : Alexandre Millot

ISBN : 978-2-04-732330-4

Sommaire

Programme de Term S

Contenus	Modalités et mise en œuvre
Arithmétique Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.	On fera la sythèse des connaissances acquises dans ce domaine au collège et en classe de seconde.
Congruences dans $\mathbb{Z}$. Entiers premiers entre eux.	On étudiera quelques algorithmes simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier.
Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. PPCM.	On démontrera que l'ensemble des nombres premiers est infini.
Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.	Sur des exemples simples, obtention et utilisation de critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes. Applications élémentaires au codage et à la cryptographie. Application : petit théorème de Fermat.
Similitudes planes Définition géométrique. Cas des isométries. Caractérisation complexe : toute similitude a une écriture complexe de la forme. $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ (a non nul).	Les similitudes seront introduites comme transformations du plan conservant les rapports de distances. On fera remarquer que la réciproque d'une similitude est une similitude, que la composée de deux similitudes est une similitude et que, dans le cas général, la composition n'est pas commutative. On démontrera qu'une similitude ayant deux points fixes distincts est l'identité ou une symétrie axiale.
Étude de similitudes directes.	Forme réduite d'une similitude directe. On démontrera la propriété suivante : étant donnés quatre points A, B, A', B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'. Applications géométriques des similitudes à l'étude de configurations, la recherche de lieux et la résolution de problèmes de construction.
Sections planes de surfaces	Section de cônes et cylindres illimités d'axes $(z'z)$ par des plans parallèles aux plans de coordonnées. Surface d'équation $z = x^2 + y^2$ ou $z = xy$ coupées par des plans parallèles aux plans de coordonnées.

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Congruences

1



Les transactions financières sont sécurisées et les méthodes modernes pour crypter l'information transmise font jouer un rôle important à l'arithmétique.

Retrouver les solutions des exercices repérés par www. sur :
www.bordas-pixel.fr/TleS

1 Utiliser des critères de divisibilité

Pour chacun des nombres suivants, dire s'il est multiple de 2, de 3 ou de 5.

a. 213 **b.** 132 **c.** 1 320 **d.** 2 713

2 Effectuer une division euclidienne

Trouver le quotient q et le reste r dans la division euclidienne :

a. de 25 par 2 **b.** de 37 par 3 **c.** de 453 par 21

3 Utiliser la division euclidienne

Écrire les nombres suivants sous la forme $a + \frac{b}{c}$, où a est un entier relatif, b et c sont des entiers naturels et $0 \leqslant \frac{b}{c} < 1$. Vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice.

a. $\frac{25}{13}$ **b.** $\frac{33}{31}$ **c.** $-\frac{34}{27}$

4 Justifier la divisibilité

Soit n un entier naturel. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier en démontrant si c'est vrai ou en donnant un contre-exemple si c'est faux.

a. Si n est pair, alors son carré est pair.

b. Si n est impair, alors son carré est pair.

c. $n(n+1)$ est divisible par 2.

d. Si n est divisible par 6, alors $n+2$ est pair.

5 Décomposer en produit de facteurs premiers

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres entiers suivants :

a. 12×54 **b.** 100^{72} **c.** 213

6 Trouver le chiffre des unités

Quel est le chiffre des unités :

a. de la somme des 10 premiers entiers naturels impairs ?

b. de $n(n+1)(n+2)$ si n est un entier naturel pair ?

7 Résoudre des équations dans $\mathbb{Z}$

Déterminer l'ensemble des points à coordonnées entières sur les courbes dont les équations sont données ci-dessous. Si possible, préciser l'expression des coordonnées de ces points :

a. $y = 2x + 3$ **b.** $x^2 - y^2 = 0$ **c.** $x^2 + y^2 = -1$

8 Simplifier des fractions

Rendre irréductibles les fractions suivantes :

a. $\frac{43}{57}$ **b.** $\frac{355}{220}$ **c.** $\frac{2\,445}{3\,420}$

Mémento p. 140

ACTIVITÉ 1 Le premier qui a trouvé !

Dans toute l'activité, on se place dans un repère orthonormal du plan.

> Lorsque c'est possible, on peut penser à écrire l'équation sous la forme $y = f(x)$, afin d'obtenir facilement la représentation ou un tableau de valeurs.

1 On considère la courbe $\mathscr{C}_1$ d'équation $xy = 6$.
a. Représenter cette courbe grâce à un grapheur ou un tableur. Conjecturer le nombre de points à coordonnées entières de $\mathscr{C}_1$.
b. Démontrer la conjecture.

2 On considère maintenant la courbe $\mathscr{C}_2$ d'équation $x^2 + y^2 = 7$.
a. Quelle est la nature de $\mathscr{C}_2$?
Conjecturer le nombre de points à coordonnées entières de $\mathscr{C}_2$.
b. Démontrer la conjecture.

3 On considère enfin les courbes $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ d'équations respectives $x^2 - y^2 = 43$ et $x^2 - y^2 = 40$.

> Conjecture faible : conjecture réalisée sur un petit nombre d'exemples.

a. Une conjecture concernant le nombre de points à coordonnées entières sur $\mathscr{C}_3$ et sur $\mathscr{C}_4$ est-elle facilement réalisable ? Réaliser alors une *conjecture faible*.
b. En écrivant le premier membre de chaque équation comme un produit, démontrer ou infirmer les conjectures.

PROBLÈME OUVERT

ACTIVITÉ 2 Sur un calendrier

Un phénomène céleste se reproduit tous les 23 jours. Il s'est produit le 5 janvier de cette année (supposée non bissextile). Armand commence, à partir du 17 juillet, à observer le ciel tous les jours.

Au bout de combien de jours sera-t-il en mesure d'observer le phénomène céleste ?

ACTIVITÉ 3 Autour d'un nombre

Soit n un entier naturel. On s'intéresse au nombre $F(n) = n + (n + 1)^2 + (n + 2)^3$.

1 En utilisant un tableur, émettre une conjecture concernant :
a. Les valeurs de n telles que $F(n)$ est un multiple de 10.
b. Les valeurs de n telles que $F(n)$ est divisible par 3.
c. Les valeurs de n telles que $F(n)$ est un carré.

2 Valider, si possible, ces conjectures.

> **Pour valider la conjecture c, on peut éventuellement transformer l'expression grâce à un logiciel de calcul formel.**

> Ceci peut faire penser à l'addition d'angles : si l'on ajoute un angle de $\frac{7\pi}{6}$ rad et un angle de $\frac{5\pi}{6}$ rad, on obtient un angle dont la mesure principale est 0 rad !

3 a. Quelle règle semble avoir été utilisée pour compléter la table d'addition suivante ?

> On écrira ainsi $\underline{2} + \underline{2} = \underline{2 + 2} = \underline{1}$, et même $\underline{4} = \underline{1}$...

+	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$
$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{0}$
$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$

b. On prend $n = 3k + 2$ avec k entier naturel. Que vaut $\underline{n}$?
Développer $(n + 1)^2$ et en déduire la valeur de $\underline{(n + 1)^2}$. Comparer à $(\underline{n + 1})^2$.
De même, déterminer $\underline{(n + 2)^3}$ et comparer à $(\underline{n + 2})^3$.
Déduire de ce qui précède $\underline{F(n)}$, et en déduire que $F(n)$ est divisible par 3.

4 Pourrait-on créer une autre table d'addition permettant de démontrer la conjecture faite au **1. a.** ?

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

INFO
0 est un multiple de tous les entiers... mais n'est diviseur que de 0.

Définition Si a et b sont deux entiers relatifs, on dit que
- b est un **multiple** de a s'il existe un entier k tel que $b = ka$.
- a est un **diviseur** de b si b est un multiple de a.

On dit aussi que « a divise b » ou que « b est divisible par a » et on note $a|b$.

ATTENTION
On a $24 = 5 \times 4{,}8$ mais 4,8 n'est pas un entier... donc 24 n'est pas divisible par 5 !

EXEMPLES
- 15 est un multiple de 3 et de 5 ; les entiers 3, 5, –3 sont des diviseurs de 15.
- L'ensemble des nombres pairs est l'ensemble des multiples de 2.

Ainsi, l'ensemble des nombres pairs est l'ensemble des nombres de la forme $2k$, où k est un entier relatif.
L'ensemble des nombres impairs est alors l'ensemble des nombres de la forme $2k + 1$ avec k entier relatif.

INFO
Tout nombre entier est multiple de 1 et de –1, c'est-à-dire que 1 et –1 sont des diviseurs de tout entier.

Propriété Soit a, b et c trois entiers relatifs.
Si a divise b et si b divise c, alors a divise c.

ATTENTION
On ne peut pas utiliser la même lettre k pour deux entiers a priori différents.

DÉMONSTRATION
Comme a divise b, il existe un entier relatif k tel que $b = ka$. De même, b divise c donc il existe un entier relatif k' tel que $c = k'b$.
En remplaçant, on obtient $c = k'ka$. Mais $k'k$ est un entier relatif, donc a divise c.

Remarque
L'ensemble des diviseurs de a est égal à l'ensemble des diviseurs de $-a$.

INFO
Une combinaison linéaire de a et b est un entier s'écrivant $ma + nb$ avec m et n entiers relatifs.

Propriétés Soit a, b et c trois entiers relatifs.
a. Si c divise a, alors c divise ab.
b. Si c divise a et b, alors c divise $a + b$, $a - b$, ainsi que toute combinaison linéaire de a et b.

DÉMONSTRATION
a. Si c divise a, alors il existe un entier relatif k tel que $a = kc$.
On en déduit que $ab = kcb$, ou encore $ab = (kb)c$.
Comme kb est un entier relatif, c divise ab.

b. Si c divise a et b alors il existe des entiers relatifs k et k' tels que $a = ck$ et $b = ck'$.
Soit m et n deux entiers relatifs. Alors $ma + nb = mck + nck'$, donc $ma + nb = (mk + nk')c$, avec $mk + nk' \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que c divise $ma + nb$.
En particulier, pour $m = 1$ et $n = 1$, on obtient que c divise $a + b$; et pour $m = 1$ et $n = -1$, que c divise $a - b$.

EXEMPLES
- Soit n et p deux entiers. On suppose que 3 divise $n - p$ et $2n + 3p$. On peut en déduire que 3 divise $3n + 2p$ (en faisant la somme) et $n + 4p$ (en faisant la différence). On peut aussi dire que 3 divise $2n + 3p - 2(n - p) = 5p$, et que 3 divise $3(n - p) + 2n + 3p = 5n$. Ce type de raisonnement sera utile au chapitre 2.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $A(n) = 5n^2 + 15n$. Prouvons que 10 divise $A(n)$.

D'après la propriété **a.**, 5 divise $5n^2$ et 5 divise $15n$.
D'après la propriété **b.**, on peut alors affirmer que 5 divise $5n^2 + 15n$, c'est-à-dire $A(n)$.
On voit que $A(n)$ se factorise par $5n$: $A(n) = 5n(n + 3)$.
Comme n et $n + 3$ ne sont pas de même parité, $n(n + 3)$ est divisible par 2. Ainsi, il existe un entier relatif p tel que $n(n + 3) = 2p$. Finalement, $A(n) = 10p$, donc $A(n)$ est multiple de 10.

Remarque
Lorsqu'on aboutit à une égalité du type $a = b(x + y)$, on doit impérativement spécifier que $x + y$ est entier avant de conclure que b divise a.
En effet, $5 = 2(1 + 1{,}5)$ mais 5 n'est pas divisible par 2.

Propriétés Soit a et b deux entiers relatifs **non nuls.**

a. Si b divise a, alors $|b| \leqslant |a|$.
b. Si b divise a et a divise b alors $a = b$ ou $a = -b$.

INFO
Dans $\mathbb{R}$, si $a = xc$ avec des réels a, x et c strictement positifs, on peut avoir $xc < c$. Il suffit de prendre, par exemple, $c = 2$ et $x = 0{,}1$.

DÉMONSTRATION

a. b divise a donc il existe un entier relatif k tel que $a = kb$. En particulier, $|a| = |k| \times |b|$. Comme $|k|$ et $|b|$ sont des entiers naturels non nuls (puisque $a \neq 0$), on a $|k| \times |b| \geqslant |b|$, ce qui prouve $|b| \leqslant |a|$.
b. D'après **a.**, si b divise a et a divise b, alors $|b| \leqslant |a|$ et $|a| \leqslant |b|$.
On en déduit : $|a| = |b|$, soit $a = b$ ou $a = -b$.

Remarque
On déduit en particulier de la propriété **a.** que l'ensemble des diviseurs d'un entier non nul est fini.

Le cours en action

Démontrer un résultat de parité

ÉNONCÉ **Démontrer qu'un produit de deux entiers est impair si, et seulement si, les deux entiers sont impairs.**

AIDE On va procéder, comme souvent en arithmétique, par disjonction des cas.
Ici, on va prouver que le produit n'est impair que lorsque l'on fait le produit de deux nombres impairs.

SOLUTION • Si les deux entiers sont pairs, ils s'écrivent $a = 2p$ et $b = 2k$ avec p et k entiers.
Leur produit est $4pk = 2(2pk)$ avec $2pk$ entier.
Ainsi, ab est pair.

• Si un seul des deux entiers est impair, par exemple a, alors il s'écrit $a = 2p + 1$ avec p entier ; et b s'écrit $b = 2k$ avec k entier.
Le produit s'écrit $ab = 2k(2p + 1)$, ce qui est de la forme $2q$ avec $q = k(2p + 1)$ entier.
Le produit ab est donc pair.

• Si les deux entiers sont impairs, on écrit $a = 2p + 1$ et $b = 2k + 1$ avec p et k entiers.
On a alors $ab = 2p(2k) + 2p + 2k + 1$, ce qui s'écrit
$ab = 2(2pk + p + k) + 1$. Comme $2pk + p + k$ est entier, ab est bien un entier impair.
On a bien ainsi démontré que ab est impair si, et seulement si, a et b sont impairs.

Se méfier

Si a divise b, a-t-on $a \leqslant b$?

Si a divise b, on ne peut pas affirmer que $a \leqslant b$.

En effet, si $b = -14$, on peut dire que 7 divise b. Et pourtant, 7 n'est pas inférieur à b. Par contre, il est inférieur à $|b|$.

Déterminer les derniers chiffres d'un entier

ÉNONCÉ **Prouver, sans le calculer, que $P = 41 \times 42 \times 43 \times 44 + 1$ se termine par 25.**

SOLUTION $41 = 40 + 1$, $42 = 40 + 2$, $43 = 40 + 3$, $44 = 40 + 4$.
Donc, lorsque l'on développe P, on a un terme égal à 40^4, un deuxième terme égal à 40^3 $(1 + 2 + 3 + 4)$, un troisième égal à 40^2 $(3 \times 4 + 1 \times 2 + 2 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 3)$, un quatrième égal à 40 $(1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 4 + 1 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4)$ et enfin $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1$.
Les trois premiers termes se terminent par 00. Les chiffres des dizaines et unités sont donc donnés par les trois derniers termes, c'est-à-dire par $40 \times 50 + 24 + 1$.
Or, 40×50 a pour chiffres des unités et dizaines 0, donc P se termine comme $24 + 1$, c'est-à-dire par 25.

Prouver qu'un nombre est un multiple d'un autre

ÉNONCÉ **Prouver que, s'il existe k tel que $n = 2 + 3k$, alors $A(n) = n^3 + n^2 - 5n + 1$ est un multiple de 3.**

AIDE Il s'agit de prouver que $A(2 + 3k)$ peut s'écrire sous la forme $3p$, avec p entier relatif.

SOLUTION $A(2 + 3k) = (2 + 3k)^3 + (2 + 3k)^2 - 5(2 + 3k) + 1$.
Plutôt que de tout développer, à la main ou à l'aide d'un logiciel, essayons de faire apparaître le facteur 3 :
$-5(2 + 3k) + 1 = -9 - 5 \times 3k$ donc $-5(2 + 3k) + 1 = -3(3 + 5k)$.
Ainsi, $-5(2 + 3k) + 1$ est un multiple de 3.
Pour prouver que $A(2 + 3k)$ est un multiple de 3, il suffit donc de prouver que $(2 + 3k)^3 + (2 + 3k)^2$ est un multiple de 3.
Mais $(2 + 3k)^3 + (2 + 3k)^2 = (2 + 3k)^2(2 + 3k + 1)$
$= (2 + 3k)^2(3 + 3k)$.
Or 3 divise 3 et 3 divise $3k$, donc 3 divise $3 + 3k$.
Finalement, $(2 + 3k)^2(3 + 3k)$ est un multiple de 3.
On a prouvé que $A(2 + 3k)$ est la somme de deux multiples de 3. C'est donc un multiple de 3.

Exercices 10, 14 et 15

2 Nombres premiers

ATTENTION
1 n'est pas premier !

Définition Un nombre entier naturel est dit **premier** s'il admet exactement deux diviseurs (1 et lui-même)

RAPPEL
2 est le seul entier premier pair.

EXEMPLES
- 2, 3, 5, 7, 11 sont des entiers premiers.
- 6 n'est pas premier car il admet 4 diviseurs : 1, 2, 3 et 6.

Théorème Tout entier naturel n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

DÉMONSTRATION

L'entier n étant strictement supérieur à 1, deux cas sont possibles :
- ou bien il est premier, auquel cas il admet bien un diviseur premier : lui-même.
- ou bien il n'est pas premier, auquel cas il existe p et q entiers tels que $n = pq$, avec $1 < p < n$ et $1 < q < n$.

Notons n_1 le plus petit de ces deux diviseurs ($n_1 = p = q$ éventuellement).
Si n_1 est premier, c'est terminé.
Sinon, il existe p_1 et q_1 entiers tels que $n_1 = p_1q_1$ avec $1 < p_1 < n_1$ et $1 < q_1 < n_1$.
On note alors n_2 le plus petit de ces deux diviseurs, et on a, d'une part, n_2 divise n_1 et d'autre part $1 < n_2 < n_1 < n$.
On poursuit ainsi le processus : comme il n'y a qu'un nombre fini d'entiers entre 1 et n, il existe k tel que $1 < n_k < n$, n_k divise n et n_k premier.

INFO
Ce genre de démonstration est assez classique en arithmétique. On construit une suite d'entiers naturels strictement décroissante.

Théorème Tout entier naturel n non premier et strictement supérieur à 1 admet un diviseur premier p tel que $p \leqslant \sqrt{n}$.

DÉMONSTRATION

D'après les hypothèses, il existe a et b entiers naturels tels que $n = ab$, $1 < a < n$ et $1 < b < n$.
On peut par ailleurs supposer que $a \leqslant b$. En multipliant par a les deux membres de l'inégalité, on obtient $a^2 \leqslant ba$, c'est-à-dire $a^2 \leqslant n$. Alors, $a \leqslant \sqrt{n}$.
Si a est premier, on a le résultat annoncé en posant $p = a$.
Sinon, d'après le théorème précédent, on peut affirmer que a admet un diviseur premier p, qui vérifie bien $p \leqslant \sqrt{n}$.

INFO
Il est inutile de tester les nombres non premiers qui sont des multiples de nombres déjà testés.

Méthode Pour savoir si un nombre n est premier ou non, il suffit de tester sa divisibilité par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée.

Remarque On utilise cette méthode pour construire le crible d'Eratosthène (voir le TD 1).

Théorème Il existe une infinité de nombres premiers.

DÉMONSTRATION

Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers et soit alors n le plus grand d'entre eux. Posons alors $N = n! + 1$.
- Prouvons que N est premier : s'il ne l'était pas, d'après le premier théorème, il existerait un nombre premier p tel que p divise N. Mais on a : $1 < p \leqslant n$ (puisque n est le plus grand nombre premier), donc p est l'un des facteurs de $n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Alors p divise $n!$, donc p divise la différence $N - n!$.
Cette différence étant égale à 1, p divise 1. Ainsi, $p = 1$, ce qui est absurde.
Finalement, N est bien premier.

• D'autre part, $N > n$. Ainsi, on a trouvé un nombre premier plus grand que n… ce qui contredit l'hypothèse de départ.

• L'ensemble des nombres premiers est donc infini.

INFO
Ce théorème est admis.

Théorème Tout entier naturel strictement supérieur à 1 admet une décomposition, unique à l'ordre des facteurs près, en produit de nombres premiers.

Le cours en action

Prouver qu'un nombre est ou non premier

ÉNONCÉ **Les nombres 4 731, 3 377 et 1 009 sont-ils premiers ?**

SOLUTION

• La somme des chiffres de 4 731 est égale à 15, donc divisible par 3. Ainsi, 4 731 est un multiple de 3.
Il n'est pas premier.

• Comme la partie entière de $\sqrt{3377}$ est égale à 58, il suffit de tester tous les nombres premiers inférieurs à 58.
3 377 n'est pas divisible par 2 car il est impair ; il n'est pas non plus divisible par 3 car la somme des chiffres est 20 (donc pas divisible par 3) ; comme 3 377 ne se termine ni par 0, ni par 5, il n'est pas divisible par 5. La division par 7 ne donne pas un entier.
En revanche, $3\,377 = 307 \times 11$ donc 3 377 n'est pas premier.

• Comme la partie entière de $\sqrt{1\,009}$ est égale à 31, il suffit de tester tous les nombres premiers inférieurs à 31.
1 009 n'est pas divisible par 2.
En utilisant la table d'une calculatrice, on constate que, pour n entier impair compris entre 3 et 31, $\dfrac{1009}{n}$ n'est jamais entier.
Ainsi, 1 009 n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même, et est donc premier.

AIDE Penser à utiliser la table (ou le tableur) pour tester beaucoup de valeurs :
Y = 1009/X ; DébutX = 3 ; Pas = 2 ; FinX = 31.

Exercices 21 à 24

Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

ÉNONCÉ **Décomposer $N = 204\,578$ en produit de facteurs premiers.**

SOLUTION Le nombre N est pair, donc divisible par 2 et $N = 2 \times 102\,289$.
102 289 n'est pas divisible par 2 ; la somme de ses chiffres n'est pas un multiple de 3 donc il n'est pas divisible par 3 ; il n'est clairement pas divisible par 5 ; le premier nombre premier par lequel il est divisible est 11 et on a donc $N = 2 \times 11 \times 9\,299$;
9 299 n'est divisible ni par 11, ni par 13, mais on constate qu'il est multiple de 17 : $N = 2 \times 11 \times 17 \times 547$.
Comme $E(\sqrt{547}) = 23$, il suffit de tester si 547 est divisible par 17, 19 et 23.
Comme il ne l'est pas, il est premier et la décomposition est achevée.

Exercices 25 à 27

Réaliser un algorithme

Vérifier que l'algorithme suivant permet de décomposer un nombre en produit de facteurs premiers :

```
1. Demander N
2. Initialiser i à 2
3. Tant que i <= N faire
       Tant que ENT(N/i) = N/i
             Écrire i
             Affecter à N
             la valeur N/i
       Ajouter 1 à i
```

AIDE À l'étape 3, si $N = k \times i$ avec k entier, on remplace N par k, c'est-à-dire N/i, et on dit que i est un diviseur de N. Chaque diviseur i est écrit autant de fois qu'il divise N.

Remarque : On peut imaginer un algorithme écrivant une seule fois chaque diviseur mais indiquant sa puissance. Les programmes correspondant, sur calculatrices, sont disponibles sur le site www.bordas-pixel.fr/TleS.

Se méfier

$n! + 1$ est-il premier ?

La formule $n! + 1$ pour n premier ne donne pas toujours un nombre premier.
Par exemple, $5! + 1 = 121$, qui est divisible par 11.

3 Division euclidienne

INFO
$\mathbb{R}$ est aussi archimédien.

Propriété Si b appartient à $\mathbb{N}^*$, alors, quel que soit a entier positif, il existe dans $\mathbb{N}$ tel que $a < nb$. On dit que $\mathbb{N}$ est archimédien.

DÉMONSTRATION

Si $a = 0$, il suffit de prendre $n = 1$.
Si $a = 1$, il suffit de prendre $n = 2$ car $b \geqslant 1$, donc $2b \geqslant 2 > a$.
Sinon, $a(b + 1) > a$ pour tout a non nul (car $b \geqslant 1$) donc $n = b + 1$ convient.

EXEMPLE

Pour $b = 5$ et $a = 3\,567$, on sait que $b \times 800 = 4\,000$, donc $n = 800$ vérifie $nb > a$. Par contre, n n'est pas optimal.

ATTENTION
Cette propriété (admise) n'est vraie ni dans $\mathbb{Z}$, ni dans $[0\,;+\infty[$ (voir Se méfier).

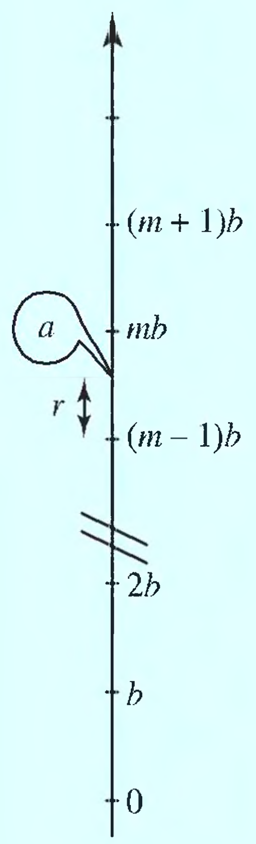
Propriété Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Remarque
En revanche, il n'y a aucune raison pour qu'elle admette un plus grand élément.

EXEMPLE

L'ensemble des entiers n tels que $5n > 3\,567$ est non vide car il contient 800.
Il admet donc un plus petit élément. On trouve que $n = 714$ est ce plus petit élément.

Théorème Soit a un nombre entier relatif et b un entier naturel non nul.
Il existe un unique couple $(q\,;r)$ d'entiers relatifs tels que $0 \leqslant r < b$ et $a = bq + r$.
On dit que a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

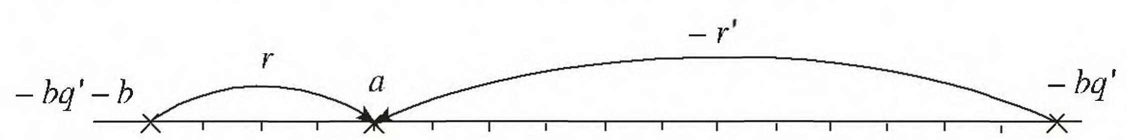


DÉMONSTRATION

• Existence

On commence par le cas où a est un entier naturel.
Si $a = 0$, il suffit de prendre $q = r = 0$.
Sinon, on sait (propriété précédente) qu'il existe un entier naturel n tel que $a < nb$.
Ainsi, l'ensemble A des entiers n tels que $a < nb$ n'est pas vide. Il admet donc un plus petit élément m.
Cet élément m est non nul (sinon, on aurait $a < 0$ ce qui est exclu) et, pour tout entier naturel n tel que $n < m$, on a $nb \leqslant a$. En particulier, $m - 1$ est un entier naturel et $(m - 1)b \leqslant a < mb$.
Posons $q = m - 1$ et considérons $r = a - bq$.
En ajoutant $-bq$ aux trois membres de l'inégalité ci-dessus, on obtient
$0 \leqslant a - bq < mb - (m - 1)b$, c'est-à-dire $0 \leqslant r < b$.
D'où l'existence du couple $(q\,;r)$.

Considérons maintenant le cas $a < 0$.
Alors $-a > 0$ et, d'après ce qui précède, il existe un unique couple $(q'\,;r')$ d'entiers naturels tels que $-a = bq' + r'$ et $0 \leqslant r' < b$.
Si $r' = 0$, on a $a = b(-q') + 0$, donc le couple couple $(q\,;r)$ avec $q = -q'$ et $r = 0$ convient.
Sinon, $a = b(-q') + (-r')$. Il nous faut un reste positif donc cela ne convient pas.
Mais $a = b(-q') - b + (b - r')$ ou encore $a = b(-q' - 1) + (b - r')$.



Or $0 < r' < b$, donc $0 > -r' > -b$, ce qui donne $b > b - r' > 0$. On a ainsi $a = bq + r$ avec $q = (-q' - 1)$, $r = b - r'$ et $0 \leqslant r < b$.

• Unicité

Supposons qu'il existe deux couples $(q_1\,;r_1)$ et $(q_2\,;r_2)$ qui vérifient les conditions du théorème.

On a $a = bq + r_1$ et $a = bq_2 + r_2$ avec $0 \leqslant r_1 < b$ et $0 \leqslant r_2 < b$.
Alors, $r_2 = a - bq_2$, $-r_1 = -a + bq_1$, $0 \leqslant r_2 < b$ et $-b < -r_1 \leqslant 0$.
Par addition, $r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$ et $-b < r_2 - r_1 < b$.
Ainsi, $r_2 - r_1$ est un multiple de b compris strictement entre $-b$ et b. C'est donc 0.
Comme $r_2 - r_1 = 0$ et $b \neq 0$, l'égalité ci-dessus permet d'affirmer que $q_1 - q_2 = 0$.
Ainsi, on a bien $r_1 = r_2$ et $q_1 = q_2$, d'où l'unicité annoncée.

ATTENTION

Le reste dans la division de – 35 par 4 n'est pas l'opposé du reste dans la division de 35 par 4.

EXEMPLES

- $35 = 4 \times 8 + 3$ donc, dans la division de 35 par 4, le quotient est $q = 8$ et le reste 3.
- $-35 = 4 \times (-8) - 3$ mais $-3 < 0$ et ne peut être le reste. Il faut donc enlever encore une fois 4 : $-35 = 4 \times (-9) + 1$ donc, dans la division de – 35 par 4, le quotient est $q = -9$ et le reste 1.

Le cours en action

Faire le lien avec la fonction partie entière

ÉNONCÉ **Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul. Comment, à partir de la touche « diviser » de la calculatrice, peut-on obtenir le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b ?**

SOLUTION On sait que $a - bq = r$, où q est le quotient et r est le reste. Ainsi, $0 \leqslant a - bq < b$ et b étant strictement positif,

on a : $0 \leqslant \frac{a - bq}{b} < \frac{b}{b}$, ce qui donne $0 \leqslant \frac{a}{b} - q < 1$,

ou encore $q \leqslant \frac{a}{b} < q + 1$.

Ainsi, $q = \mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$, où E désigne la fonction partie entière.

Puis r s'obtient en calculant $a - bq$.

AIDE
- Sur les calculatrices TI, la fonction partie entière est notée **int** (MATH NUM 5).
Attention, **iPart** renvoie la troncature, et non la partie entière.
- Sur les calculatrices Casio, c'est la fonction **Intg** (OPTN NUM).
En revanche, **Int** renvoie la troncature, et non la partie entière.

Déterminer un reste

ÉNONCÉ **Soit a et b deux entiers relatifs.**
On sait que le reste dans la division de a par 456 est 324, et le reste dans la division de b par 456 est 253.
Quel est le reste dans la division de $a + b$ par 456 ?

SOLUTION On a : $a = 456q + 324$ et $b = 456p + 253$ avec q et p entiers relatifs.

Par conséquent, $a + b = 456(q + p) + 324 + 253$, ce qui donne $a + b = 456(q + p) + 577$.
Mais $577 > 456$ donc ce n'est pas le reste cherché. On peut cependant écrire $577 = 456 \times 1 + 121$ et on obtient alors $a + b = 456(q + p + 1) + 121$.

On a bien $0 \leqslant 121 < 456$, donc 121 est le reste dans la division de $a + b$ par 456.

Résoudre un problème concret

ÉNONCÉ **Une émission est diffusée toutes les 7 heures. Sa première diffusion a eu lieu le 1er mars à 8 h.**
À quelle(s) heure(s) sera-t-elle diffusée le 12 mars ?

SOLUTION Entre le 1er mars 8 h et le 11 mars minuit, il s'est écoulé $24 \times 10 + 16 = 256$ h.

Or, $256 = 7 \times 36 + 4$. Ainsi, le 11 mars à minuit, cela fera 4 heures que l'émission n'aura pas été diffusée. Elle sera donc diffusée le 12 mars à 3 h, puis 10 h, puis 17 h.

Exercices 41 et 48

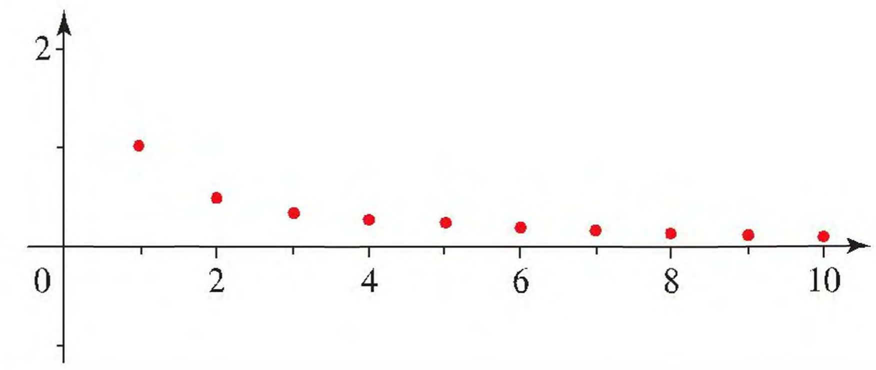
Se méfier

La propriété « du plus petit élément » n'est vraie ni dans $\mathbb{Z}$, ni dans $[0 ; +\infty[$

Dans $\mathbb{Z}$, il suffit de considérer l'ensemble des opposés des entiers naturels, qui n'est pas minoré.

Dans $[0 ; +\infty[$ on prend par exemple l'ensemble $\mathscr{E}$ des $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Il admet un minorant (0), mais pas de plus petit élément.

Sinon, il existerait $a > 0$ tel que $\frac{1}{p} = a$ pour un certain p entier et que $\frac{1}{n} \geqslant a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais, si $\frac{1}{p} = a$, alors $\frac{1}{p+1} < a$, ce qui contredit le caractère minimal de a.



4 Congruences

a. Nombres congrus modulo *n*

INFO
En particulier, *a* est toujours congru modulo *n* à son reste dans la division euclidienne de *a* par *n*.

Définition Soit a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
On dit que **a est congru à b modulo n** si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

Notations a est congru à b modulo n se note au choix :
$$a \equiv b\ (n) \quad \text{ou} \quad a \equiv b\ [n] \quad \text{ou} \quad a \equiv b \bmod n.$$

Remarque Cette relation est « symétrique » ; on peut dire indifféremment que a est congru à b ou que b est congru à a.

EXEMPLES
- $21 = 4 \times 5 + 1$ donc le reste dans la division euclidienne de 21 par 4 est 1.
Par ailleurs, le reste dans la division euclidienne de 25 par 4 est 1.
Ainsi, 21 est congru à 25 modulo 4.
- Tous les nombres pairs sont congrus à 0 modulo 2 ; tous les nombres impairs sont congrus à 1 modulo 2.

INFO
Dans **1.**, on peut remplacer $a - b$ par $b - a$. La propriété **2.** est appelée transitivité de la relation de congruence.

Théorème Soit a et b deux entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.
1. $a \equiv b\ (n)$ si, et seulement si, n divise $a - b$.
2. Si $a \equiv b\ (n)$ et $b \equiv c\ (n)$, alors $a \equiv c\ (n)$.
3. $a \equiv 0\ (n)$ si, et seulement si, n divise a.
4. Il existe un unique entier naturel r tel que $0 \leqslant r \leqslant n - 1$ et $a \equiv r\ (n)$.
Ce nombre est le reste dans la division euclidienne de a par n.

DÉMONSTRATION

1. Si $a \equiv b\ (n)$, alors il existe des entiers relatifs k et k' et un entier naturel r tel que $0 \leqslant r < n$ tels que $a = kn + r$ et $b = k'n + r$.
On a alors $a - b = (k - k')n$, ce qui prouve que n divise $a - b$.

Réciproquement, supposons que n divise $a - b$.
Effectuons la division euclidienne de a et b par n. Il existe des entiers relatifs k, k', r, r' tels que $0 \leqslant r < n$, $0 \leqslant r' < n$, $a = kn + r$ et $b = k'n + r'$. On a alors $a - b = (k - k')n + (r - r')$, donc $r - r' = a - b + (k' - k)n$.
Or n divise $(k' - k)n$ et n divise $a - b$, donc n divise leur somme $r - r'$. Mais $-n < r - r' < n$, donc $r - r' = 0$. Ainsi, $r = r'$ et donc a est congru à b modulo n.

INFO
Ce type de raisonnement est particulièrement important.

2. et **3.** sont évidents grâce à la définition.

4. La division euclidienne de a par n donne l'existence d'un unique couple $(q\ ;\ r)$ d'entiers tels que $a = nq + r$ et $0 \leqslant r \leqslant n - 1$. Et, par définition, a est congru à r modulo n.
S'il existe r' entier tel que $0 \leqslant r' \leqslant n - 1$ et $a \equiv r'\ (n)$, alors $r \equiv r'\ (n)$, et donc n divise $r - r'$.
Mais $-(n - 1) \leqslant r - r' \leqslant n - 1$, donc $r = r'$.

EXEMPLE
$3\,523 \equiv -245\ (12)$ car $3\,523 + 245 = 3\,768$ et 12 divise $3\,768$.

b. Congruences et opérations

ATTENTION
- On ne peut pas diviser des congruences par des nombres.
- La réciproque du **4.** est loin d'être vraie (voir Se méfier).

Théorème Soit a, b, c et d des entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.
1. Si $a \equiv b\ (n)$, alors $ac \equiv bc\ (n)$.
2. Si $a \equiv b\ (n)$ et si $c \equiv d\ (n)$, alors $a + c \equiv b + d\ (n)$ et $a - c \equiv b - d\ (n)$.
3. Si $a \equiv b\ (n)$ et si $c \equiv d\ (n)$, alors $ac \equiv bd\ (n)$.
4. Si $a \equiv b\ (n)$, alors, quel que soit p entier naturel, on a : $a^p \equiv b^p\ (n)$.

DÉMONSTRATION

1. Si n divise $b - a$, alors n divise $c(b - a)$ donc $cb - ca$. Ainsi, $cb \equiv ca\ (n)$

2. Par hypothèse, n divise $b - a$ et n divise $d - c$, donc n divise leur somme $S = (b - a) + (d - c)$ et leur différence $D = (b - a) - (d - c)$. Mais $S = (b + d) - (a + c)$ et $D = (b - d) - (a - c)$.
D'après le théorème précédent, on a donc $a + c \equiv b + d\ (n)$ et $a - c \equiv b - d\ (n)$.

3. D'après **1.**, $ac \equiv bc\ (n)$ en multipliant $a \equiv b\ (n)$ par c.
De même, d'après **1.**, $bc \equiv bd\ (n)$ en multipliant $c \equiv d\ (n)$ par b.
En utilisant alors la transitivité, il vient bien $ac \equiv bd\ (n)$.

4. Démonstration par récurrence.
- Initialisation : on a par hypothèse $a^0 \equiv b^0\ (n)$ car $a^0 = b^0 = 1$.
- Hérédité : on suppose que, pour un certain entier naturel k, $a^k \equiv b^k\ (n)$.
D'après **3.**, on en déduit que $a^k \times a \equiv b^k \times b\ (n)$ puisque $a \equiv b\ (n)$.
Ainsi, on a bien $a^{k+1} \equiv b^{k+1}\ (n)$, ce qui prouve l'hérédité.
- Conclusion : la propriété $a^p \equiv b^p\ (n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, donc vraie pour tout p entier naturel.

EXEMPLE Prouvons que $2^{43} \equiv 3\ (5)$. En effet, $2^4 = 16$ donc $2^4 \equiv 1\ (5)$. Mais $2^{43} = 2^{4 \times 10 + 3}$, c'est à dire $2^{43} = (2^4)^{10} \times 2^3$.
Comme $2^4 \equiv 1(5)$, donc $(2^4)^{10} \times 2^3 \equiv 1 \times 2^3 (5)$. Mais $2^3 = 8$, donc $(2^4)^{10} \times 2^3 \equiv 3\,(5)$.

Le cours en action

Déterminer un reste dans une division euclidienne

ÉNONCÉ Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{2710} par 7.

AIDE On cherche un entier n tel que 5^n est congru à 1 ou -1 modulo 7… puis on utilise les propriétés des congruences.

SOLUTION On a $5^2 = 25$, donc $5^2 = 7 \times 3 + 4$, soit $5^2 \equiv 4\ (7)$.
Puis $5^3 = 125$ donc $5^3 = 7 \times 17 + 6$, soit $5^3 \equiv 6\ (7)$, ou encore $5^3 \equiv -1\ (7)$.
Mais $5^{2710} = 5^{3 \times 903 + 1}$, ou encore $5^{2710} = (5^3)^{903} \times 5$.
Comme $5^3 \equiv -1\ (7)$, d'après les propriétés des puissances, $(5^3)^{903} \equiv (-1)^{903} \bmod 7$.
Or, $(-1)^{903} = -1$ donc $(5^3)^{903} \equiv -1\ (7)$. Par propriété de produit, on obtient alors $(5^3)^{903} \times 5 \equiv -5\ (7)$.

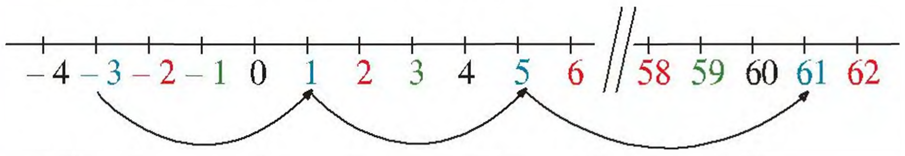
Or $-5 \equiv 2\ (7)$ et $0 \leqslant 2 < 7$, donc 2 est le reste cherché.

Attention : le nombre obtenu n'est pas forcément le reste !

Exercices 61 à 64 et 71

Congruences modulo 4

Considérons les congruences modulo 4.
On a représenté d'une même couleur les nombres qui sont congrus à un même nombre modulo 4.



mod 4 : – 3 congru à 1   1 congru à 5   5 congru à 61

Les propriétés vérifiées par la relation de congruence en font ce que l'on appellera une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
On dira, dans l'enseignement supérieur, que tous les entiers congrus à 1 modulo 4 constituent la classe d'équivalence de 1 modulo 4.

Démontrer un résultat du cours

ÉNONCÉ Démontrer directement que si $a \equiv b\ (n)$ et si $c \equiv d\ (n)$, alors $ac \equiv bd\ (n)$.

AIDE Enlever et ajouter un même nombre (astuce classique).

SOLUTION

$bd - ac = bd - \mathbf{bc} + \mathbf{bc} - ac$, donc $bd - ac = b(d - c) + (b - a)c$.

Par hypothèse, n divise $d - c$ et n divise $b - a$, donc n divise $b(d - c)$ et $(b - a)c$, puis leur somme. Ceci prouve que n divise $bd - ac$, c'est-à-dire que $ac \equiv bd\ (n)$.

Se méfier

$a^2 \equiv b^2\ (n)$ n'entraîne pas forcément $a \equiv b(n)$

Par exemple, considérons les congruences modulo 3 et posons $a = 4$ et $b = 2$.

On a $a^2 \equiv 1\ (3)$ car $16 = 3 \times 5 + 1$ et $b^2 \equiv 1\ (3)$ car $4 = 3 \times 1 + 1$. Ainsi, $a^2 \equiv b^2\ (3)$ mais on ne peut pas pour autant affirmer que $a \equiv b\ (3)$.

En effet, $a - b = 2$, donc a n'est pas congru à b modulo 3 puisque 2 n'est pas un multiple de 3.

Ne pas diviser des congruences par des nombres

Par exemple, $2 \equiv 14\ (4)$; en divisant par 2 les deux membres, on aurait tendance à écrire qu'alors $1 \equiv 7\ (4)$.

Mais $7 - 1 = 6$ n'est pas un multiple de 4, donc cette congruence est fausse !

TICE

1 Déterminer le nombre de diviseurs d'un entier

OBJECTIF Apprendre à trouver et à dénombrer les diviseurs d'un nombre entier.

ÉNONCÉ 1

On donne $72 = 2^3 \times 3^2$. Écrire tous les diviseurs de 72.

UNE MÉTHODE

• Pour décomposer un nombre inférieur à 100 en produit de facteurs premiers, on peut utiliser les « tables ».

• Pour écrire les diviseurs rapidement, on réalise un arbre.

Pour obtenir tous les diviseurs, le plus simple est alors de réaliser un arbre :

On aurait pu faire un arbre dont les deux premières branches auraient eu pour extrémités 1 et –1.

SOLUTION

On sait que les diviseurs de 72 sont tous les nombres de la forme $(-1)^p \times 2^k \times 3^m$, avec p égal à 0 ou 1, k égal à 0, 1, 2 ou 3 et m égal à 0, 1 ou 2.

Facteurs 2	Facteurs 3		Diviseurs
1	1	1×1	1 et – 1
	3	1×3	3 et – 3
	3^2	1×3^2	9 et – 9
2	1	2×1	2 et – 2
	3	2×3	6 et – 6
	3^2	2×3^2	18 et – 18
2^2	1	$2^2 \times 1$	4 et – 4
	3	$2^2 \times 3$	12 et – 12
	3^2	$2^2 \times 3^2$	36 et – 36
2^3	1	$2^3 \times 1$	8 et – 8
	3	$2^3 \times 3$	24 et – 24
	3^2	$2^3 \times 3^2$	72 et – 72

L'arbre donne tous les diviseurs positifs. On complète la liste avec leurs opposés.

ÉNONCÉ 2

Décomposer 2 695 000 en produit de facteurs premiers et en déduire le nombre de diviseurs de 2 695 000.

UNE MÉTHODE

• Réaliser un tableau en deux colonnes avec les diviseurs et quotients successifs.

• Dénombrer les diviseurs en ayant en tête l'arbre que l'on pourrait faire pour les lister.

Il est conseillé d'utiliser les critères de divisibilité pour gagner du temps.

On peut faire une ébauche de l'arbre au brouillon, mais, ici, faire tout l'arbre serait long et improductif.

Le cours, partie 2

SOLUTION

On peut présenter la recherche des diviseurs comme suit :

	A	B
1	2 695 000	2
2	1 347 500	2
3	673 750	2
4	336 875	5
5	67 375	5
6	13 475	5
7	2 695	5
8	539	7
9	77	7
10	11	11
11	1	

Ci-contre, on a saisi 2 695 000 en A1, puis 2 en B2 ;
En A2, on a tapé = A1/B1. On « recopie » la formule vers le bas.
À la main, on essaie alors des valeurs dans la colonne B, en commençant par 2, puis 3, puis 5...
D'après le tableau ci-contre, on peut écrire la décomposition :

$$2\,695\,000 = 2^3 \times 5^4 \times 7^2 \times 11.$$

Remarque : dans le cas présent, la recherche peut-être conduite autrement car 2 695 000 est divisible par $1\,000 = 10^3 = (5 \times 2)^3$ donc $2\,695\,000 = 2695 \times 5^3 \times 2^3$.

Mais 2 695 est un multiple de 5 et on a $2\,695 = 5 \times 539$; ainsi, $2\,695\,000 = 539 \times 5^4 \times 2^3$. On termine comme ci-dessus.

Nombre de diviseurs

Les diviseurs de 2 695 000 sont tous les entiers de la forme

$(-1)^p \times 2^k \times 5^m \times 7^n \times 11^r$, où p, k, m, n et r sont des entiers naturels tels que p est égal à 0 ou 1 ; $0 \leqslant k \leqslant 3$; $0 \leqslant m \leqslant 4$; $0 \leqslant n \leqslant 2$ et $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Trouver le nombre de diviseurs de 2 695 000 revient à trouver le nombre de listes ordonnées $(p\,;k\,;m\,;n\,;r)$. Comme il y a 2 choix pour p puis, p étant choisi, 4 choix pour k, puis 5 choix pour m, 3 pour n et 2 pour r, le nombre de diviseurs est égal à $2 \times 4 \times 5 \times 3 \times 2 = 240$.

TICE

2 Démontrer une divisibilité sans congruences

OBJECTIF Démontrer directement des résultats de divisibilité.

ÉNONCÉ

Soit k un entier naturel. On pose $A_k = k^2 + k - 2$.

1. Démontrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$ ($k \neq 1$), A_k est divisible par $k - 1$.

2. Pour quelle valeur de k, l'entier A_k est-il divisible par k ? $k + 1$? $k + 2$?

UNE MÉTHODE

• Pour prouver qu'un entier N est divisible par $k - 1$ quel que soit k, il suffit de prouver que $N = (k - 1)p$, avec p entier.

• Pour déterminer les valeurs pour lesquelles une somme est divisible par un entier, on peut utiliser les propriétés de divisibilité.

SOLUTION

1. On se propose de factoriser A_k.

Première solution : on considère le polynôme $x^2 + x - 2$. Il s'agit d'un trinôme du second degré, qu'on factorise. Ce trinôme a une racine évidente : 1.

On en déduit que $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.

En particulier, on a donc, pour k entier, $A_k = (k - 1)(k + 2)$. Comme $k + 2$ est un entier, ceci prouve bien que A_k est divisible par $k - 1$ pour tout k différent de 1.

Deuxième solution : faire apparaître $k - 1$ « à la main ».
$k^2 + k - 2 = k^2 - k + 2k - 2 = k(k - 1) + 2(k - 1)$; ainsi, $k^2 + k - 2 = (k + 2)(k - 1)$.
On conclut comme pour la première méthode.

2. D'après la factorisation obtenue à la question **1.**, on peut affirmer que, quel que soit k différent de -2, A_k est divisible par $k + 2$.
Pour les autres cas, on peut essayer de conjecturer à l'aide d'un tableur (on peut également utiliser le mode TABLE de la calculatrice).

• En B2 : formule = A2^2 + A2 – 2, puis recopier vers le bas.
• En C2 : formule = B2/A2
• En D2 : formule = B2/(A2 + 1)

	A	B	C	D
1	k	Ak	Ak/k	Ak/(k+1)
2	0	-2	#DIV/0!	-2
3	1	0	0	0
4	2	4	2	1,33333333
5	3	10	3,33333333	2,5
6	4	18	4,5	3,6
7	5	28	5,6	4,66666667
8	6	40	6,66666667	5,71428571
9	7	54	7,71428571	6,75
10	8	70	8,75	7,77777778
11	9	88	9,77777778	8,8
12	10	108	10,8	9,81818182
13	11	130	11,8181818	10,8333333
14	12	154	12,8333333	11,8461538
15	13	180	13,8461538	12,8571429

Attention : $k \in \mathbb{Z}$ donc il faut, dans un deuxième temps, faire le travail avec $k = 0$, $k = -1$, $k = -2$,... Dans le cas contraire, la conjecture est incomplète !

On conjecture alors que A_k est divisible par k si, et seulement si, $k = 1$, $k = -1$, $k = 2$ ou $k = -2$; et que A_k est divisible par $k + 1$ si et seulement si $k = 0$, $k = -2$, $k = 1$ ou $k = -3$.

Démontrons la conjecture

• Si $k \neq 0$, alors k divise k^2 et k divise k, donc k divise $k^2 + k$.

Condition nécessaire : si k divise $A_k = k^2 + k - 2$, alors k divise $A_k - (k^2 + k)$, c'est-à-dire -2.
Les diviseurs de -2 sont 1, -1, 2 et -2, donc si k divise A_k, on a nécessairement $k = 1$ ou $k = -1$ ou $k = 2$ ou $k = -2$.

Condition suffisante : il suffit de vérifier que, si on remplace k par 1, -1, 2 et -2, k divise bien A_k, ce qui est vrai. Par exemple, si $k = -2$, on a $A_k = 0$; or, -2 divise 0, donc k divise A_k.

Conclusion : k divise A_k si, et seulement si, $k = 1$ ou $k = -1$ ou $k = 2$ ou $k = -2$.

• Supposons maintenant que $k \neq -1$
$k + 1$ divise $k^2 + k$ car $k^2 + k = k(k + 1)$. Par conséquent, si $k + 1$ divise A_k, alors $k + 1$ divise $A_k - (k^2 + k)$, c'est-à-dire -2 ; ceci impose que $k + 1 = 1$ ou $k + 1 = -1$ ou $k + 1 = 2$ ou $k + 1 = -2$, ce qui donne $k = 0$ ou $k = -2$ ou $k = 1$ ou $k = -3$.
On vérifie que ces quatre valeurs conviennent, ce qui prouve la conjecture.

Le cours, partie 1

TICE

3 Démontrer une divisibilité avec des congruences

OBJECTIF Utiliser les congruences pour démontrer des résultats de divisibilité.

ÉNONCÉ 1

Pour tout entier relatif n, on pose $A(n) = n + (n + 1)^2 + (n + 2)^3$.

Déterminer les valeurs de n telles que $A(n)$ soit multiple de 7.

UNE MÉTHODE Pour étudier la divisibilité par 7 de la somme, on réalise un tableau de congruences modulo 7 pour chaque terme.

SOLUTION

On commence par réaliser un tableau de congruences modulo 7.

n	0	1	2	3	4	5	6
$(n+1)^2$	1	4	2	2	4	1	0
$(n+2)^3$	1	6	1	6	6	0	1
$A(n)$	2	4	5	4	0	6	0

D'après le tableau, $A(n)$ est congru à 0 modulo 7 si, et seulement si, n est congru à 4 ou 6 modulo 7. Ainsi, $A(n)$ est divisible par 7 si, et seulement si, n est de la forme $4 + 7k$ ou $6 + 7k$ avec k entier relatif.

ÉNONCÉ 2

Soit k un entier naturel. On pose $A_k = 2^k - 1$.

1. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, émettre une conjecture concernant les valeurs de k pour lesquelles A_k est divisible par 7.

2. Démontrer cette conjecture.

UNE MÉTHODE Pour démontrer un résultat sur une infinité de valeurs, on peut :
- se ramener à un ensemble fini.
- procéder ensuite par disjonction de cas.

SOLUTION

1. Dans un tableur, on peut penser à faire afficher les restes dans la division euclidienne de A_k par 7 : par exemple, en B3, on saisit la formule = MOD(B2 ; 7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	A k	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
3	Reste division par 7	0	1	3	0	1	3	0	1	3	0	1

Pour étudier la divisibilité de a par b, il suffit d'étudier les congruences modulo b.

Dans la liste ci-dessus, les seuls multiples de 7 sont 0, 7, 63, 511. Ils sont obtenus pour les valeurs de k suivantes : 0, 3, 6, 9.

On peut donc conjecturer que les valeurs de k pour lesquelles A_k est divisible par 7 sont les multiples de 3.

On peut reformuler la conjecture :

A_k est divisible par 7 si, et seulement si, k est un multiple de 3.

2. Comme on veut prouver que A_k n'est divisible par 7 que lorsque k est un multiple de 3, nous allons écrire tous les nombres k sous la forme $3n$, $3n + 1$ ou $3n + 2$, avec n entier naturel.

Il suffit donc d'étudier la divisibilité de $2^{3n} - 1$, $2^{3n+1} - 1$ et $2^{3n+2} - 1$ par 7, pour n entier naturel. Pour cela, on étudie les congruences modulo 7 de 2, 2^2 et 2^3 : $2 \equiv 2\ (7)$; $2^2 \equiv 4\ (7)$ et $2^3 \equiv 1\ (7)$. On peut s'arrêter à 2^3 car il est congru à 1 modulo 7 et, comme $2^4 = 2^3 \times 2$, on en déduit que $2^4 \equiv 2 \times 1\ (7)$, etc.

On utilise que, si $a \equiv b\ (7)$, alors $a^p \equiv b^p\ (7)$ avec $a = 2^3$ et $b = 1$.

On a alors $2^3 \equiv 1\ (7)$ et $2^{3n} = (2^3)^n$, donc $2^{3n} \equiv 1^n\ (7)$, puis $2^{3n} - 1 \equiv 1 - 1\ (7)$, soit $2^{3n} - 1 \equiv 0\ (7)$. Ceci prouve que, si k est un multiple de 3, alors A_k est divisible par 7.

On utilise maintenant la compatibilité des congruences avec la multiplication.

On étudie les deux autres cas :

on a $2^{3n+1} = 2^{3n} \times 2$ donc, en utilisant l'égalité $2^{3n} \equiv 1\ (7)$, on obtient $2^{3n+1} \equiv 1 \times 2\ (7)$ et donc $2^{3n+1} - 1 \equiv 1\ (7)$. Pour $k = 3n + 1$, A_k n'est donc pas un multiple de 7.

Enfin, $2^{3n+2} = 2^{3n} \times 2^2$, donc $2^{3n+2} \equiv 1 \times 4\ (7)$ et donc $2^{3n+2} - 1 \equiv 3\ (7)$.

Ainsi, $2^k - 1$ est bien divisible par 7 si, et seulement si, k est un multiple de 3.

Le cours, partie 4

4 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ sans congruences

OBJECTIF Apprendre à résoudre des équations dans $\mathbb{Z}$ en utilisant différentes méthodes.

ÉNONCÉ 1

On souhaite démontrer qu'il n'existe aucun couple d'entiers relatifs solution de l'équation $x^2 + 5y^2 = 3$.

1. Justifier que le couple (0 ; 0) n'est pas solution de l'équation.

2. Supposons qu'un couple $(x ; y)$ soit solution de l'équation. Quels autres couples sont alors également solutions ? En déduire que l'on peut réduire l'étude aux couples d'entiers naturels.

3. Démontrer que, nécessairement, $y = 0$. Conclure.

SOLUTION

UNE MÉTHODE Les deux membres de l'équation étant positifs, on procède par encadrements.

On pourrait traiter directement la question 3 en considérant $|y| \geqslant 1$ au lieu de $y \geqslant 1$.

1. Comme $0^2 + 5 \times 0^2 = 0$, le couple (0 ; 0) n'est pas solution de l'équation. Ainsi, si $(x ; y)$ est un couple solution, on a $|x| \geqslant 1$ ou $|y| \geqslant 1$.

2. On a $(-x)^2 = x^2$ et $(-y)^2 = y^2$. Ainsi, si $(x ; y)$ est solution, alors $(-x ; y)$, $(-x ; -y)$ et $(x ; -y)$ sont également des couples solutions. Parmi tous ces couples, l'un est un couple d'entiers naturels. On peut donc se réduire à la recherche de couples d'entiers naturels.

3. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un couple $(x ; y)$ solution tel que $y \geqslant 1$.
Alors $5y^2 \geqslant 5$ et donc $x^2 + 5y^2 \geqslant 5$. Ce qui est en contradiction avec $x^2 + 5y^2 = 3$.
Ainsi, on doit avoir $y = 0$, ce qui signifie que tout couple d'entiers naturels solution de l'équation est de la forme $(x ; 0)$. On a donc nécessairement $x^2 = 3$. Comme l'équation $x^2 = 3$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}$, il n'existe pas de couple de la forme $(x ; 0)$ solution de l'équation proposée. Il n'existe donc pas de couple d'entiers relatifs solution de l'équation.

ÉNONCÉ 2

Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E) : 9x^2 - y^2 = 6$.

SOLUTION

UNE MÉTHODE Factoriser le premier membre et décomposer en produit de facteurs premiers le second membre. Utiliser alors les diviseurs de 3 (ou de 6).

On procède par disjonction de cas.

$9x^2 - y^2 = (3x - y)(3x + y)$, donc l'équation est équivalente à $(3x - y)(3x + y) = 6$.
Comme la décomposition de 6 en produit de facteurs premiers est 3×2, dire que $(x ; y)$ est solution de (E) est équivalent à dire que

$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x - y = -6 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} 3x - y = -3 \\ 3x + y = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x + y = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3x - y = -1 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$$

Or, si $(x ; y)$ est un couple solution, alors $(x ; -y)$ est également solution.

Or $(3x - (-y))(3x + (-y)) = (3x + y)(3x - y)$, donc les solutions du système numéro 4 sont données par les solutions du système numéro 1 et réciproquement.
De même, si $(x ; y)$ est un couple solution, alors $(-x ; y)$ est également solution.
Or $(3(-x) - y)(3(-x) + y) = [-(3x + y)][-(3x - y)]$, donc les solutions du système numéro 8 sont données par les solutions du système numéro 1 et réciproquement.

Il suffit donc de chercher les couples solutions des systèmes $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

Ces systèmes n'admettent pas de couple d'entiers solution, donc l'équation (E) n'a pas de solution.

Le cours, partie 2

5 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ avec des congruences

OBJECTIF Apprendre à résoudre des équations dans $\mathbb{Z}$ en utilisant des congruences.

ÉNONCÉ 1

On considère l'équation (E) : $x^2 - 5y^2 = 3$. On souhaite prouver qu'il n'existe pas de couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de (E).

1. Justifier que, si $(x\,;y)$ est solution de (E), alors $x^2 \equiv 3\ (5)$.

2. Déterminer les valeurs possibles de x^2 modulo 5.

3. Déduire de ce qui précède que l'équation (E) n'a pas de solution.

SOLUTION

UNE MÉTHODE On se ramène à une équation plus simple grâce à des congruences bien choisies.

1. Si $(x\,;y)$ est un couple d'entiers solution de (E), alors, nécessairement, il vérifie aussi la relation $x^2 - 5y^2 \equiv 3\ (5)$.
Or $3 \equiv 3\ (5)$ et $-5 \equiv 0\ (5)$. Ainsi, le couple $(x\,;y)$ vérifie $x^2 \equiv 3\ (5)$.

2. On regarde les valeurs possibles des carrés modulo 5 : on sait que, si $x \equiv n\ (5)$, alors $x^2 \equiv n^2\ (5)$. Il suffit par conséquent de considérer les carrés de 0, 1, 2, 3 et 4.

L'utilisation des congruences permet de diminuer le nombre de cas à étudier.

Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de n^2	0	1	4	9	16
n^2 congru à (mod 5)	0	1	4	4	1

Ainsi, les valeurs possibles de x^2 modulo 5 sont 0, 1 et 4.

3. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un couple $(x\,;y)$ vérifiant $x^2 - 5y^2 = 3$. Alors, d'après la question **1.** on doit avoir $x^2 \equiv 3\ (5)$. Mais, d'après la question **2.**, l'équation $x^2 \equiv 3\ (5)$ n'a pas de solution. Par conséquent, l'équation de départ n'a pas de solution.

Attention : C'est l'absence de solutions modulo 5 qui permet de conclure (regarder par exemple ce qui se passe modulo 3).

ÉNONCÉ 2

Déterminer les entiers relatifs x solutions de l'équation $4x^2 + 5x^3 + x^4 \equiv -3\ (5)$.

SOLUTION

UNE MÉTHODE
- Simplifier éventuellement l'équation donnée
- Observer à quoi est congru chaque terme de la somme modulo 5, en fonction de x.

Première étape : on « simplifie » l'équation en observant que $5 \equiv 0\ (5)$, donc, par propriété des congruences, $5x^3 \equiv 0\ (5)$. De plus, $4 \equiv -1\ (5)$, donc l'équation est équivalente à (E) : $-x^2 + x^4 \equiv 2\ (5)$.

Deuxième étape : on cherche les restes possibles de x^2 et x^4 dans la division euclidienne par 5 pour x compris entre 0 et 4.

Le tableau suivant donne les congruences modulo 5 :

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	−1	−1	1
x^4	0	1	1	1	1

On préfère écrire −1 plutôt que 4 pour 2^2, car $(-1)^2$ est plus simple à calculer.

Explications concernant le tableau :
on sait que $x^4 = (x^2)^2$; $2^2 = 4$; $4 \equiv -1\ (5)$ d'où $(2^2)^2 \equiv (-1)^2\ (5)$, soit $2^4 \equiv 1\ (5)$;
De même, $3^2 = 9$; $9 \equiv 4\ (5)$ donc $9 \equiv -1\ (5)$.

Troisième étape : on cherche toutes les possibilités pour que $-x^2 + x^4 \equiv 2\ (5)$.
On peut faire le calcul de $-x^2 + x^4$ colonne par colonne, ce qui donne un nouveau tableau :

x	0	1	2	3	4
$-x^2 + x^4$	0	0	2	2	0

Si le second membre avait été −1, l'équation n'aurait pas eu de solution.

D'après ce tableau, $-x^2 + x^4 \equiv 2\ (5)$ si, et seulement si, $x \equiv 2\ (5)$ ou $x \equiv 3\ (5)$.

Conclusion : l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres relatifs de la forme $5k + 2$ et $5k' + 3$, où k et k' appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Le cours, partie 4

TD 1 Crible d'Ératosthène

TICE

OBJECTIF Utiliser un algorithme de recherche des nombres premiers et en déduire des propriétés.

Le crible d'Ératosthène est un crible permettant de trouver de façon systématique les nombres premiers... à condition d'avoir du temps !
Supposons que l'on souhaite faire la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 500.
On commence par écrire la liste des entiers de 1 à 500 puis on procède ainsi :

- On barre 1 qui n'est pas premier.
- On entoure 2 et on barre tous ses multiples.
- On entoure 3 et on barre tous ses multiples.
- Le premier nombre non barré est alors 5 ; on l'entoure et on barre tous ses multiples.
- On poursuit ainsi jusqu'à ce que tous les nombres soient entourés ou barrés, en s'arrêtant dès que le nombre non barré est supérieur à $\sqrt{500}$.

1. Dans un tableur, faire afficher tous les nombres entiers inférieurs ou égaux à 500 comme ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6
2	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18

- Saisir 1 en A1, 2 en B1 ; mettre les cellules en surbrillance puis « recopier » vers la droite.
- Recommencer avec 7 et 8 pour la deuxième ligne.
- Mettre les deux lignes en surbrillance puis « recopier » vers le bas.

2. Au lieu de barrer, on peut changer la couleur de fond des cellules avec le menu « Format ; Cellule ; Motifs » ou avec l'icône de la barre d'outils.
Dresser la liste des nombres premiers inférieurs à 500. Combien y en a-t-il ?

3. Seules deux colonnes semblent contenir les nombres premiers supérieurs à 4. Le justifier.
En déduire des formules susceptibles de donner les nombres premiers supérieurs à 4.

4. a. Que fait l'algorithme suivant (où E désigne la fonction partie entière) ?

```
1. Demander N
2. Initialiser k à 0
3. Tant que 5 + 6k <= N,
     Initialiser j à 2 et p à 0
        Tant que j <= E(racine(5 + 6k)) et p = 0 faire
          Si (5 + 6k)/j = E((5 + 6k)/j) alors p = 1
          Ajouter 1 à j
        Si p = 0 alors Afficher 5 + 6k
        Ajouter 1 à k
```

b. Écrire, sur calculatrice, le programme correspondant à cet algorithme.

TD 2 Répartition des nombres premiers

TICE

OBJECTIF Étudier un problème ouvert historique.

La répartition des nombres premiers a toujours intéressé les mathématiciens. On sait (voir le TD 1) que tous les nombres premiers, à partir de 5, s'écrivent sous la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$ avec k entier naturel (mais que tous ces entiers ne sont pas nécessairement premiers).
On sait également qu'il y a une infinité de nombres premiers.
Nous allons ici nous intéresser au nombre $\pi(n)$ de nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre entier naturel n donné.

1 Pour de petites valeurs de n

Penser à utiliser le tableur en colonnes (et non en lignes) pour ensuite pouvoir réaliser les graphiques demandés.

a. Recopier et compléter le tableau suivant donnant $\pi(n)$ pour n entre 5 et 100 par pas de 5 :

n	5	10	15	20	25	30	35	40	45	20	...	90	95	100
$\pi(n)$	3	4												

b. On s'intéresse alors à la proportion de nombres premiers inférieurs ou égaux à n parmi tous les entiers inférieurs ou égaux à n.
Ajouter une ligne au tableau en donnant cette proportion. Que remarque-t-on ?

c. Réaliser un graphique donnant $p(n) = \dfrac{\pi(n)}{n}$ en fonction de n.

En utilisant, par exemple, les courbes de tendances d'un tableur ou d'un grapheur, proposer une formule donnant approximativement $p(n)$ en fonction de n.

2 Pour de plus grandes valeurs

On donne ci-dessous les valeurs de $\pi(n)$ pour de plus grandes valeurs de n :

n	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\pi(n)$	168	1 229	9 592	78 498	664 579	5 761 455	50 847 534	455 052 512

a. Dans un tableur, saisir les valeurs du 1 ainsi que celles du tableau ci-dessus (on pourra par exemple saisir les valeurs de n dans la colonne A et celles de $\pi(n)$ dans la colonne B).

Faire calculer $p(n) = \dfrac{\pi(n)}{n}$ dans la colonne C et tracer le graphique donnant $p(n)$ en fonction de n. Quel est le problème ?

b. Étant donné le problème constaté, on décide de remplacer n par $\log(n)$ en abscisse.
Pour cela, se placer sur la colonne B et insérer une colonne (menu Édition) ; la nouvelle colonne s'appelle B, les valeurs de $\pi(n)$ étant maintenant en C...
Faire calculer $\log(n)$ dans la colonne B. Placer, sur un graphique, les points de coordonnées $(\log(n)\,;\,p(n))$. La représentation graphique obtenue fait-elle penser à celle d'une fonction usuelle ? Laquelle ?

Au tableur : fonction LOG(nombre).

c. Par tâtonnement, déterminer une valeur de a telle que la représentation graphique soit proche de celle de $x \mapsto \dfrac{1}{ax}$.

ATTENTION
On a représenté $p(n)$ en fonction de $\log(n)$ et non de n.

d. Dans le tableur, faire afficher les valeurs de $\dfrac{1}{a\log(n)}$ et celles de $\dfrac{1}{\ln(n)}$.

Comparer à celles de $p(n)$. Conclure.

> C'est au XVIIIe siècle que Gauss aurait conjecturé que $\dfrac{\pi(n)\ln(n)}{n} \approx 1$ pour n assez grand.
>
> Cette conjecture fut précisée et démontrée par Charles de la Vallée Poussin et Jacques Hadamard au XIXe siècle, le résultat étant le suivant :
>
> $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = 1.$$

3 La conjecture de Riemann

Des méthodes d'approximation permettent de calculer cette intégrale de façon approchée.

On appelle $li(n)$ le nombre $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{\ln(t)}\,dt$.

a. Sait-on exprimer $li(n)$ en fonction de n ? Un logiciel de calcul formel sait-il le faire ?

b. En utilisant un logiciel de calcul formel, déterminer une valeur approchée de $li(n)$ pour les valeurs de n suivantes : 10, 100, 1 000, 10 000 et 100 000.

c. À l'aide du tableur, calculer $\pi(n) - li(n)$, puis $\sqrt{n}\ln(n)$.
Déterminer une constante C telle que, pour tout n, $|\pi(n) - li(n)| \leqslant C\sqrt{n}\ln(n)$.

Cette conjecture n'a pour l'instant été ni démontrée, ni invalidée... mais intéresse beaucoup de scientifiques. De nombreux calculs effectués en font une conjecture très forte.

> La conjecture de Riemann peut être exprimée ainsi :
> il existe une constante C telle que pour tout entier naturel $n > 2$:
>
> $$|\pi(n) - li(n)| \leqslant C\sqrt{n}\ln(n).$$

Les travaux dirigés

TD 3 Dans un ordinateur

TICE

OBJECTIF **Objectif : Étudier des systèmes de numération utilisés en particulier en informatique.**

1 Système binaire

Dans un ordinateur, les nombres sont codés dans le système binaire, c'est-à-dire en base 2. Par exemple, considérons le nombre 27. Il s'écrit 27 en base 10 car $27 = 2 \times 10 + 7$.

Écrire 27 en base 2 consiste à le décomposer en une somme de puissances de 2 : $\sum_{k=0}^{n} a_k 2^k$, avec, pour tout k, a_k égal à 0 ou à 1.
En réalisant des divisions euclidiennes successives, on trouve que
$27 = 2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2 \times 1 + 1$. L'écriture en base 2 de 27 est donc 11011.

a. Écrire en base 2 les nombres de 0 à 16, puis le nombre 323.

b. Les nombres ci-dessous sont écrits en base 2. Donner leur écriture en base 10.

110101 ; 10001101 ; 11111111111.

• =MOD(n, d) donne le reste de la division de n par d.
• =ENT(n) donne la partie entière de n.

c. On souhaite convertir 7 951 en base 2 à l'aide d'un tableur. Expliquer comment on a obtenu la feuille de calcul ci-dessous, et terminer le travail afin de donner l'écriture en base 2.

	A	B	C
1	Nombre	Quotient	Reste
2	7 951	3 975	1
3	3 975	1 987	1
4	1 987	993	1

d. Écrire un algorithme permettant de convertir un nombre écrit en base 10 en base 2.

2 Système hexadécimal

L'écriture en base 2 prend beaucoup de place ! On s'intéresse donc à un autre codage utilisé en informatique : le système hexadécimal, c'est-à-dire en base 16.

Le système hexadécimal est beaucoup utilisé par les ordinateurs : il peut être intéressant d'étudier un fichier en écriture hexadécimale.

L'idée est donc d'écrire un nombre sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k 16^k$, où a_k est un entier naturel tel que $a_k < 16$.

a. Pourquoi 23 s'écrit-il 17 en base 16 ?

b. Quel problème se pose pour écrire 27 en base 16 ?

c. Pour surmonter ce problème, on décide de remplacer les nombres a_k compris entre 10 et 15 par les lettres de A à F. On obtient ainsi le système hexadécimal.
Dans ce système, 27 s'écrit 1B, 28 s'écrit 1C...
Écrire alors 1 224 en utilisant le système hexadécimal.

d. Quelle est l'écriture en base 10 de E0B ?

3 Passer du binaire à l'hexadécimal

Considérons un nombre écrit dans le système binaire. On peut, quitte à ajouter un zéro à gauche, toujours l'écrire comme une juxtaposition de blocs du type 00, 01, 11, 10.
On désigne par b_k un de ces blocs.

a. Soit $a = b_n \ldots b_2 b_1$, avec $n \geqslant 1$. Justifier que $a < 16$ si, et seulement si, $n \leqslant 2$.
En déduire comment passer de l'écriture en binaire à l'écriture hexadécimale.

b. Boby Lapointe (1922-1972), chanteur, acteur et humoriste a inventé le système « bibinaire » en s'appuyant sur la remarque précédente. Le principe du système bibinaire est, partant d'un nombre écrit en système binaire, de le découper en tranches comme ci-dessus, puis :

• pour la première tranche de droite, de remplacer 00 par o, 01 par a, 10 par e et 11 par i ;

• pour la deuxième tranche, on remplace 00 par H, 01 par B, 10 par K, 11 par D.

Puis on continue ainsi, en alternant consonnes et voyelles.

Combien vaut BoBiKiDiHo dans le système décimal ?

TD 4 Critères de divisibilité

OBJECTIF **Démontrer les critères de divisibilité bien connus.**

Dans tout ce TD, nous considérerons un nombre N et son écriture décimale $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$, où les a_i sont des chiffres entre 0 et 9. Cela signifie que $N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$.

L'utilisation des congruences permet de démontrer de nombreux critères de divisibilité.

1 Critères de divisibilité par 2 et par 4

a. Rappeler le critère permettant de dire si un nombre est ou non divisible par 2.

b. Soit k un entier naturel. Quel est le reste de la division euclidienne de 10^k par 2 ?
En déduire que $N \equiv a_0$ (2), puis que N est divisible par 2 si, et seulement si, son chiffre des unités est un multiple de 2.

c. Comment savoir, sans réaliser la division, si un nombre est divisible par 4 ? (On peut éventuellement utiliser un tableur pour réaliser une conjecture).

Idée importante : si k entier naturel et si $k > 1$, alors on a :
$10^k = 10 \times 10^{k-1}$

d. Soit k un entier naturel. Quel est le reste, selon les valeurs de k, de la division euclidienne de 10^k par 4 ? En déduire que $N \equiv 10a_1 + a_0$ (4), puis énoncer un critère de divisibilité par 4.

2 Critères de divisibilité par 3 et par 9

a. Rappeler le critère permettant de savoir si un nombre est divisible par 3.

b. Démontrer que, quel que soit k entier naturel, $10^k \equiv 1$ (3) et retrouver ainsi le critère de divisibilité par 3.

c. Démontrer que tout nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

d. En déduire un critère de divisibilité par 9.

Pour d'autres critères de divisibilité : exercices 98 à 101.

3 Critère de divisibilité par 5

En suivant le même plan que pour les critères de divisibilité précédents, démontrer le critère de divisibilité par 5.

TD 5 Équation du second degré et congruences TICE

OBJECTIF **Factoriser modulo un nombre p.**

On considère les deux équations suivantes :

$$(E) : 6n^2 + 5n + 1 = 0 \quad \text{et} \quad (E_m) : 6n^2 + 5n + 1 \equiv 0 \ (7)$$

1. Le polynôme $6n^2 + 5n + 1$ admet-il une factorisation de la forme $a(n - b)(n - c)$ avec a, b et c entiers ?

2. On note P le nombre $6n^2 + 5n + 1$.

Modulo 7, on ne peut pas considérer le nombre $\frac{5}{6}$. Par contre, on peut chercher s'il existe x entier tel que $6x \equiv 5$ (7).

a. Justifier que P est congru à $-n^2 + 5n + 1$ modulo 7.

b. On souhaite réaliser une « mise sous forme canonique modulo 7 ».
Pour cela, on souhaite trouver un entier b tel que $-(n - b)^2 \equiv -n^2 + 5n - b^2$ (7).
Justifier qu'il suffit pour cela de résoudre l'équation $2b \equiv 5$ (7).

c. Dresser le tableau donnant les restes dans la division euclidienne de $2x$ par 7 pour x entier compris entre 0 et 6. En déduire une solution de l'équation précédente.

d. À l'aide des questions précédentes, déterminer deux entiers naturels b et c, compris entre 0 et 6, tels que (E_m) est équivalente à l'équation $-(n - b)^2 + c \equiv 0$ (7).

Comparer à la factorisation obtenue dans $\mathbb{R}$ grâce au discriminant par exemple.

e. En s'inspirant de la méthode du **c.**, résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $x^2 \equiv 2$ (7).
En déduire une factorisation de P modulo 7, puis deux solutions de l'équation (E_m).
Y a-t-il d'autres factorisations possibles ? D'autres solutions à l'équation ?

f. Proposer une autre façon de résoudre l'équation (E_m).

Application

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Cours partie 1

1 Soit n un entier naturel. On appelle $A(n)$ le nombre $n(n+1)(n+2)$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A(n)$ est divisible par 3.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A(n)$ est divisible par 6.

3. Donner une condition sur n pour que $A(n)$ soit divisible par 12.

www. **2** Justifier que, pour n entier relatif, $35n+2$ n'est pas divisible par 7.

3 Justifier que, pour n entier relatif, $45n+8$ n'est pas divisible par 3.

4 VRAI OU FAUX ?

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Le produit de deux entiers pairs est un entier pair.

2. Le produit de deux entiers impairs est un entier impair.

3. La somme de deux entiers impairs est un entier impair.

4. Si le carré d'un entier est pair, alors cet entier est pair.

5 VRAI OU FAUX ?

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 8.

2. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.

3. Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.

6 Soit k un entier relatif non nul. On suppose que, quel que soit n entier naturel, k divise $4n-7$ et $15-4n$.

En déduire que 8 est un multiple de k.

7 Soit k un entier relatif non nul. On suppose que, quel que soit n entier naturel, k divise $3n-7$ et $15-6n$.

1. En déduire que k divise 1.

2. Quelles sont les valeurs possibles pour k ?

8 On considère un nombre entier n tel que $-3 \leqslant n \leqslant 4$.

On sait de plus que 15 divise $-2n+11$.

Combien vaut n ?

9 VRAI OU FAUX ?

On considère deux entiers relatifs a et b.

Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse.

1. Si 7 divise ab, alors 7 divise a et 7 divise b.

2. Si 7 divise ab, alors 7 divise a ou 7 divise b.

3. Si 7 divise $a+b$, alors 7 divise a et 7 divise b.

10 On considère, pour n entier naturel, les nombres A_n définis par $A_n = 3^n - 1$.

1. Que dire de la parité de A_n pour n entier naturel ?

2. Justifier que, quel que soit n, $A_n - 2$ est divisible par 6.

11 VRAI OU FAUX ?

Dire, pour chacune des assertions suivantes, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Si n est un entier, alors $n(n+1)$ est un nombre pair.

2. Il existe un entier pair multiple à la fois de 5, 17 et 29.

3. Il existe un entier impair multiple à la fois de 5, 6 et 7.

12 On considère le nombre $7a35$ écrit en base 10.

Déterminer les valeurs possibles du chiffre a pour que ce nombre soit divisible par 15.

13 On considère le nombre $4a3b$ écrit en base 10.

Déterminer les valeurs possibles des chiffres a et b pour que ce nombre soit divisible par 12.

14 On considère l'entier $A(n) = 3n^2 + 3n + 6$.

1. Faire afficher, à l'aide par exemple d'un tableur, les valeurs de $A(n)$ pour n compris entre 0 et 10.

2. Établir une conjecture concernant la divisibilité de $A(n)$ par 6.

3. Démontrer la conjecture : on pourra pour cela factoriser $3n^2 + 3n$.

15 Démontrer que, quel que soit l'entier n, $n^2 + n + 2$ est pair.

16

ÉNONCÉ

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $5n^2 + 28n - 96$ est divisible par $n+8$.

AIDE ET MÉTHODE on peut, au choix :

- calculer le discriminant puis factoriser en utilisant le cours sur le second degré.
- Faire apparaître le facteur souhaité par une astuce algébrique.

SOLUTION

Utilisons la deuxième méthode ; on va faire apparaître $n+8$ comme facteur.

Pour cela, on remarque par exemple que $5n(n+8) = 5n^2 + 40n$; comme $40n = 28n + 12n$, il suffit d'ajouter et soustraire $12n$.

Ainsi, $5n^2 + 28n - 96 = 5n^2 + 28n + 12n - 12n - 96$
$= 5n^2 + 40n - 12n - 96$
$= 5n(n+8) - 12n - 96$, ce qui donne
$5n^2 + 28n - 96 = 5n(n+8) - 12(n+8)$
$= (n+8)(5n-12)$.

Comme $5n-12$ est entier, cela prouve que $5n^2 + 28n - 96$ est divisible par $n+8$.

17 Démontrer que, pour tout entier naturel n, $-3n^2 + 11n + 4$ est un multiple de $n - 4$.

AIDE Voir l'exercice 16.

18 Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 11n + 10$ est un multiple de $n - 2$.

AIDE Voir l'exercice 16.

19 Démontrer que, quel que soit l'entier relatif n, $3n^3 - 11n + 48$ est un multiple de $n + 3$.

AIDE Introduire des n^2... et les enlever.

20 Démontrer que, quel que soit l'entier relatif n, $\left(21 + 21n^2 + 105n\right)\left(\frac{1}{7} - \frac{n}{21}\right)$ est un multiple de $n - 3$.

Nombres premiers

Cours partie 2

21 Préciser, sans calculs, si les nombres suivants sont premiers :

a. 37 b. $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1$

c. $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 6$

22 Préciser si les nombres suivants sont premiers :

a. 2 713 b. 8 793

c. $46 \times 97 + 23 \times 2\,713$

23 Préciser si les nombres suivants sont premiers :

a. 6 543 b. $5! + 29$ c. 1 231

d. $7! + 1$

24 Préciser si les nombres suivants sont premiers :

a. 127 b. 1 027 c. 2 701

25 Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants :

a. 7 893 b. 18 252 c. 451

26 Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants :

a. 3 125 b. 41 260 c. 3 589

27 a. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 354 et 2 100.

b. En déduire la décomposition de leur produit et de leur somme.

28 Rendre irréductibles les nombres suivants :

$a = \frac{4\,568}{297}$; $b = \frac{57\,300}{555}$; $c = \frac{2\,576}{3\,269}$.

29 Rendre irréductibles les nombres suivants :

$a = \frac{4\,500}{1250}$; $b = \frac{789}{1610}$; $c = \frac{456}{654}$.

30 Déterminer le nombre de diviseurs des entiers naturels suivants :

a. 4 562 b. 9 126 c. 169 400

31 Déterminer le nombre de diviseurs des entiers naturels suivants :

a. 3 333 b. 3 546 c. 7 783 160

32 Déterminer le nombre de diviseurs des entiers naturels suivants :

a. 2 714 b. 83 349 c. 95 000

33 Donner des entiers naturels non nuls a et b, les plus petits possibles, tels que $15a^2 = 315b$.

34 a. Décomposer 1 633 500 en un produit de facteurs premiers.

b. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $1\,633\,500n$ soit le cube d'un entier naturel m.

Que vaut alors m ?

35 **Nombres premiers circulaires**

Un nombre premier N écrit en base 10 sous la forme $\overline{a_n \ldots a_1a_0}$ est dit circulaire si chacun des nombres obtenus en réalisant une permutation circulaire des chiffres de N est un nombre premier.

1. Vérifier que 1 193 est un nombre premier circulaire.
Donner d'autres nombres premiers circulaires.
2. Donner une condition nécessaire sur ses chiffres pour qu'un nombre premier soit circulaire.
3. Le nombre 113 est-il un nombre premier circulaire ?
4. Tout nombre constitué uniquement avec les chiffres 1, 3, 7 et 9 est-il premier circulaire ?

36 Un nombre premier est permutable si tous les nombres obtenus avec les mêmes chiffres sont premiers.

1. On admet (voir l'exercice 35) que le nombre 113 est un nombre premier circulaire.
Est-il permutable ?
2. Le nombre 1 193 est-il permutable ?

Remarque : on a, jusqu'à aujourd'hui, trouvé très peu de nombres premiers permutables.

37 **Nombres abondants**

Un nombre entier naturel, supérieur ou égal à 2, est abondant s'il est strictement inférieur à la somme de ses diviseurs stricts positifs (diviseurs autres que lui-même).

Il est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts.

Enfin, il est dit déficient dans les autres cas.

1. Que peut-on dire des nombres premiers ?
2. Indiquer, parmi les 20 premiers entiers naturels, ceux qui sont abondants, déficients, ou parfaits.
3. On suppose que deux entiers N_1 et N_2 sont amicaux, c'est-à-dire que la somme des diviseurs de N_1 (N_1 exclu) est égale à N_2 et que la somme des diviseurs de N_2 (N_2 exclu) est égale à N_1.
Que peut-on dire de N_2 si N_1 est abondant ?

Division euclidienne

Cours partie 3

38 Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne :

a. de −113 par 7 **b.** de 312 par 7

39 Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne :

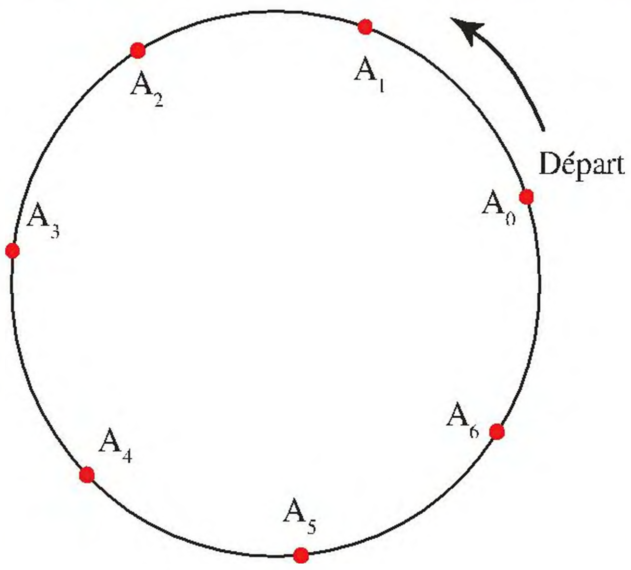
a. de 19 par 7 **b.** de −19 par 6

40 **a.** Combien y a-t-il de multiples de 7 supérieurs ou égaux à −2 713 et inférieurs ou égaux à 3 524 ?

b. Combien y a-t-il de diviseurs de 7 vérifiant les mêmes conditions ?

41 Arthur roule sur le circuit suivant à vitesse constante. Il est parti du point A_0, et il lui faut 10 minutes pour parcourir la distance entre A_0 et A_1, A_1 et A_2...

Cela fait maintenant 8 h 50 min qu'il roule. Où est-il ?



42 Effectuer la division euclidienne de 2713 par 6.

En déduire comment placer l'angle de mesure $\frac{2713\pi}{3}$ rad sur le cercle trigonométrique.

43 En utilisant une division euclidienne, donner une mesure principale de $-\frac{3879\pi}{4}$.

44 Lorsqu'on divise 397 par un entier naturel b, on obtient un quotient de 12 et un reste r.

Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

45 Lorsqu'on divise 531 par un entier naturel b, on obtient un quotient de 15 et un reste r.

Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

46 Lorsqu'on divise 536 par un entier naturel b, on obtient un reste égal à 12. Quelles sont les valeurs possibles du diviseur b et du quotient q ?

47 Fred veut piéger son petit frère Abel qui est en sixième. Il affirme qu'il a divisé 578 par un nombre b, et qu'il a obtenu un quotient égal à 37.

Il demande à son frère de deviner la valeur de b. Que doit répondre Abel ?

48 Arthur monte un escalier trois marches par trois. À la fin, il lui reste deux marches à monter. Il sait par ailleurs que l'escalier compte entre 80 et 90 marches.

Combien de pas peut-il avoir fait, et combien de marches peut compter l'escalier ?

Claire a, quant à elle, monté l'escalier quatre marches par quatre marches et il lui restait trois marches à monter à la fin.

Donner le nombre de marches de l'escalier, et le nombre de pas faits par Claire.

Nombres congrus modulo n

Cours partie 4

49 Dire si chacun des nombres suivants est congru à 5 modulo 11 :

a. 527 **b.** 11 126 **c.** −380

50 Dire si chacun des nombres suivants est congru à 7 modulo 12 :

a. 4 279 **b.** −1 193 **c.** −547

51 Pour chacun des nombres proposés, citer 4 entiers qui lui sont congrus modulo 7.

a. 27 **b.** −32 **c.** 36 **d.** −36

52 QCM

Soit a un entier relatif tel que $a \equiv -5$ (12).

Choisir toutes les bonnes réponses.

1. a. Il existe k entier relatif tel que $a = 5 + 12k$.

b. Il existe k tel que $a = 12 - 5k$.

c. Il existe k tel que $a = 7 + 12k$.

2. a. $5 + a$ est un multiple de 12.

b. $5 + a$ est un multiple de 2.

c. $7 - a$ est un multiple de 24.

d. $7 - a$ est un multiple de 6.

53 On considère deux nombres entiers a et b.

On sait que $a \equiv 23$ (7) et que $b \equiv -1$ (7).

Préciser le reste de la division euclidienne de a, puis de b, par 7.

Congruences et opérations

Cours partie 4

54 Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Soit n un entier naturel non nul et a un entier relatif.

1. Si a est congru à 4 modulo n, alors a est pair.

2. Si a est congru à 4 modulo n, alors $\frac{a}{2}$ est congru à 2 modulo n.

3. Si a est congru à 4 modulo 8, alors $\frac{a}{2}$ est congru à 2 modulo 8.

55 Soit a et b des entiers relatifs tels que $a \equiv 4\ (5)$ et $b \equiv 3\ (5)$. Justifier que $7a + 4b$ est un multiple de 5.

56 Soit a, b et c des entiers relatifs tels que $a \equiv -1\ (7)$, $b \equiv 3\ (7)$ et $c \equiv 2\ (7)$.

Justifier que $5bc + a - 1$ est un multiple de 7.

57 Soit a et b des entiers relatifs tels que $a \equiv -5\ (11)$ et $b \equiv 3\ (11)$.

Déterminer deux entiers non nuls k et m tels que $ka + mb$ soit divisible par 11.

58 Soit a un entier relatif tel que $a \equiv 4\ (5)$ et $b \equiv 3\ (5)$.

1. Déterminer le reste r (respectivement s) de la division euclidienne de a^2 (respectivement b^2) par 5.

2. En déduire le reste de la division euclidienne de $7a^2 - 4b^2$ par 5.

59

ÉNONCÉ

Démontrer, sans effectuer le calcul, que $140^{325} \equiv 5(9)$.

AIDE ET MÉTHODE

- Déterminer le reste r dans la division euclidienne de 140 par 9.
- Écrire que $140 \equiv r\ (9)$. Remplacer éventuellement r par $r - 9$ pour obtenir un second membre plus petit en valeur absolue.
- Déterminer le plus petit entier n non nul tel que $r^n \equiv 1(9)$.
- Réaliser la division euclidienne de 325 par n, puis utiliser les propriétés des congruences et des puissances.

SOLUTION

$140 \equiv 5(9)$, donc $140^{325} \equiv 5^{325}(9)$. Or $5^1 \equiv 5\ (9)$; $5^2 \equiv 7\ (9)$, soit $5^2 \equiv -2\ (9)$; $5^3 \equiv -2 \times 5\ (9)$, soit $5^3 \equiv -1\ (9)$.
Comme $(-1)^2 = 1$ et $(5^3)^2 \equiv (-1)^2\ (9)$, on en déduit que $5^6 \equiv 1\ (9)$.
On a $325 = 6 \times 54 + 1$, donc $5^{325} = 5^{6 \times 54} \times 5^1 = (5^6)^{54} \times 5$.
Comme $5^6 \equiv 1\ (9)$, les propriétés des puissances impliquent que $(5^6)^{54} \equiv 1^{54}\ (9)$; puis, par propriété des produits, on obtient $(5^6)^{54} \times 5 \equiv 1 \times 5\ (9)$, c'est-à-dire le résultat souhaité.

60 Démontrer les égalités suivantes sans réaliser les calculs :

a. $35^{456} \equiv 1\ (6)$ **b.** $119^{37} \equiv -1\ (12)$ **c.** $101^{21} \equiv 6\ (7)$

AIDE Voir l'exercice **59**.

61 **1.** Déterminer les restes dans la division euclidienne de x^2 par 6 pour x entier compris entre 0 et 5.

Présenter les résultats dans un tableau.

2. En utilisant ce qui précède, et sans calculs supplémentaires, déterminer les restes dans la division euclidienne de x^4 par 6 pour x entier compris entre 0 et 5.

62 **1.** Justifier que $5^3 \equiv -1\ (7)$.

2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 5^{3n} par 7, puis de 5^{3n+1} par 7. En déduire le reste de $5^{3\,001}$ dans la division euclidienne par 7.

63 Sans calculer $2\,007^{2\,007}$, déterminer son reste dans sa division euclidienne par 2 006.

64 On considère, pour k entier naturel, $A_k = 5^k - 3$.

1. Par quels entiers naturels strictement supérieurs à 1, A_k est-t-il divisible, quel que soit k ? Justifier.

2. Conjecturer les valeurs de k telles que A_k soit multiple de 7. Démontrer (ou invalider) la conjecture.

AIDE Réaliser un tableau donnant les restes de la division euclidienne de 5^k pour k compris entre 0 et 6.

65 Un nombre N est écrit $\overline{mcdu}$ en base 10.

Son « symétrique » M s'écrit $\overline{udcm}$.

En utilisant les congruences modulo 11, démontrer que $N + M$ est divisible par 11.

66

ÉNONCÉ

Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $3x \equiv 5\ (7)$.

AIDE ET MÉTHODE

On travaille alors par disjonction de cas, puis on revient à l'équation de départ.

SOLUTION

$3x \equiv 5\ (7) \Leftrightarrow$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $3(x + 7k) \equiv 5\ (7)$.
Or, modulo 7, tout nombre est congru à un entier compris entre 0 et 6. Le tableau suivant donne les congruences modulo 7 de $3x$ en fonction de la valeur de x :

x mod 7	0	1	2	3	4	5	6
$3x$ mod 7	0	3	6	2	5	1	4

La seule solution à l'équation dans le tableau est $x = 4$.
Ainsi, les solutions de l'équation sont les nombres de la forme $4 + 7k$, avec k entier relatif.

67 Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $7x \equiv 3\ (11)$.

AIDE Voir l'exercice **66**.

68 Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $7x \equiv 3\ (12)$.

AIDE Voir l'exercice **66**.

69 Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $3x^2 - 3x + 4 \equiv 0\ (7)$.

AIDE Voir l'exercice **66**.

70 **1.** En remarquant que $999 = 27 \times 37$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv 1\ (37)$.

2. Déduire de la question **1.** le reste dans la division euclidienne par 37 du nombre $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.

Approfondissement

Divisibilité et récurrence

Cours partie 1

71 k et x désignent des entiers naturels tels que $x > 1$ et $n > 0$.

On suppose que k divise $x^2 - x$.

1. Démontrer par récurrence sur n que $x^n - x$ est un multiple de k.

AIDE $x^{n+1} - x = x^{n+1} - x^2 + x^2 - x$.

2. Que peut-on en déduire concernant le nombre $7^{57\,896}$?

72 Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier relatif n, le nombre $5n^3 + n$ est divisible par 6.

73 Pour n entier naturel, on note F_n le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat : $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Démontrer que, quel que soit n entier naturel, $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$.

2. Émettre une conjecture concernant le chiffre de unités de F_n pour n entier naturel.

3. Démontrer la conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

74 On souhaite trouver le nombre de couples d'entiers relatifs solution de l'équation $x^2 + 4y^2 = 8$.

1. Justifier que le couple (0 ; 0) n'est pas solution de l'équation.

2. Supposons qu'un couple $(x ; y)$ soit solution de l'équation. Quels autres couples sont alors également solutions ?

En déduire que l'on peut réduire l'étude aux couples d'entiers naturels.

3. Démontrer que si $(x ; y)$ est un couple d'entiers naturels solution, alors $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Trouver alors tous les couples solutions.

Nombres premiers et divisibilité

Cours parties 1 et 2

75 Nombres amicaux

Deux nombres entiers sont dits **amicaux** ou **amiables** si la somme des diviseurs stricts positifs de chacun d'eux est égale à l'autre.

1. Vérifier que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

2. On appelle nombre **parfait** un nombre qui est amical avec lui-même.

a. Peut-on trouver des nombres premiers parfaits ?

b. Peut-on trouver des entiers naturels parfaits de la forme $2p$ avec p premier ?

76 Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) suivante : $4x^2 - y^2 = 7$.

AIDE Voir l'exercice résolu 4.

77 Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) suivante : $4x^2 - 9y^2 = 15$.

AIDE Voir l'exercice résolu 4.

78 ★ Nombres parfaits

Un nombre **parfait** est un nombre qui est égal à la somme de ses diviseurs stricts positifs (voir l'exercice **37**).

1. Peut-on trouver des entiers naturels parfaits de la forme $2p^2$ avec p premier ?

2. Peut-on trouver des entiers naturels parfaits de la forme $2p^3$ avec p premier ?

AIDE Utiliser une étude de fonction pour conclure.

79 ★ Nombres premiers particuliers

L'objectif est de démontrer que, si un nombre de la forme $A_n = a^n - 1$ est premier avec a entier naturel non nul et n entier supérieur ou égal à 2, alors A_n est de la forme $2^p - 1$ avec p entier supérieur ou égal à 2.

1. Justifier que le cas $a = 1$ est exclu.

2. Supposons que a est impair. Quelle est la parité de A_n ? Que peut-on en déduire ?

3. Supposons maintenant que a est pair.

En utilisant l'identité $x^p - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{p-1} x^k$,

démontrer que, nécessairement, $a = 2$.

4. Conclure.

80 ★ Nombres de Mersenne premiers

On appelle nombres de Mersenne les nombres $M_n = 2^n - 1$, pour n entier strictement positif.

1. a. Compléter un tableau donnant M_n pour n compris entre 2 et 10.

Quelle conjecture peut-on faire concernant le caractère premier de M_n ?

b. Calculer M_{11}. Est-il premier ? Que dire de la conjecture ?

2. a. On suppose que $n = pq$, avec p et q entiers supérieurs ou égaux à 2.

Rappeler la formule donnant $\sum_{k=0}^{p-1} 2^{qk}$ et en déduire une factorisation de $2^{qp} - 1$.

b. Déduire de ce qui précède que, si M_n est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ?

81 ★ Nombres de Fermat

On s'intéresse ici aux nombres dits de Fermat. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner une expression explicite de $\sum_{k=0}^{2n} (-x)^k$ en fonction de x et de n.

En déduire que, pour tout n entier naturel, $1 + x^{2n+1}$ est un multiple de $1 + x$.

2. a. On considère un entier n et on suppose que ce n'est pas une puissance de 2.

Justifier qu'il existe k et p dans $\mathbb{N}$, avec $p \neq 0$, tels que $n = 2^k(2p + 1)$.

b. Prouver que, pour que le nombre $2^n + 1$ soit premier, il est nécessaire que n soit une puissance de 2.

3. On appelle $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$. En calculant F_n pour les petites valeurs de n, conjecturer si ces nombres sont premiers.

82 ★ **1.** Démontrer que, quel que soit n entier naturel, les nombres $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$.

2. En utilisant que $n^2 + 5n + 4$ est divisible par $n + 1$, déterminer les valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.

AIDE multiplier $n^2 + 5n + 4$ par 3...

3. En déduire que, quel que soit n, l'entier $n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

83 ★ Démonstration guidée

Prérequis : Notion de diviseur ; existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers.

On souhaite démontrer le théorème :

> Soit p un entier premier. Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
> Si p divise ab et si p ne divise pas a, alors p divise b.

Pour cela, on va utiliser la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, ainsi que son unicité.

1. Démontrer que, si n et m sont deux entiers naturels non nuls, si n divise m et si $m = p_1^{a_1}p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ (les p_i étant des nombres premiers distincts et les a_i des entiers naturels non nuls), alors n est de la forme $p_1^{b_1}p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$, où, quel que soit i, b_i est un entier naturel et $b_i \leqslant a_i$.

2. Notons P(a, b) l'ensemble des nombres premiers intervenant dans la décomposition en produit de facteurs premiers de a ou de b.
Il y en a un nombre fini k, et on les note $p_1, p_2, \dots, p_k$.
Écrivons les décompositions en produits de facteurs premiers de a et b :
$a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ et $b = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, les α_i et β_i étant des entiers naturels tels que $(\alpha_i ; \beta_i) \neq (0 ; 0)$.

a. Comment traduire que p ne divise pas a ?

b. En utilisant le résultat du **1.**, justifier qu'il existe j compris entre 1 et k tel que $p = p_j$.

c. Déduire de **a.** et **b.** que p divise b.

Nombres premiers et congruences

Cours parties 1 à 2

84 Nombres premiers sommes de deux carrés

Soit p un nombre premier impair.

On souhaite démontrer qu'une condition nécessaire pour que p soit égal à la somme de deux carrés est que le reste de p dans la division euclidienne par 4 soit égal à 1.

1. Soit x un entier naturel. Déterminer les restes possibles dans la division de x^2 par 4.

2. Supposons qu'il existe deux entiers x et y tels que $p = x^2 + y^2$.
Justifier que, si x et y sont de même parité, alors $x^2 + y^2$ est pair. Que peut-on en déduire ?

3. Conclure

85 On note (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.
Par exemple, 2 002 ; 3 773 et 9 119 sont des éléments de (E).
L'objectif de l'exercice est de déterminer le nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. a. Décomposer 1 001 en produit de facteurs premiers.

b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.

2. a. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?

b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?

3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.

a. Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a + b$ est divisible par 3 ».

b. Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».

4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

86 Nombres sexy

Considérons deux nombres premiers p_1 et p_2, avec $p_2 > p_1$. Ils sont dits sexy si $p_2 - p_1 = 6$. Ainsi, les entiers 5 et 11 sont sexy.

On peut, dans certains cas, trouver des suites finies de nombres premiers sexy consécutifs. Par exemple, « 7 ; 13 ; 19 » est une suite de nombres premiers sexy.

Comme 19 + 6 = 25 n'est pas premier et 7 – 6 = 1 n'est pas premier, cette suite est maximale. On dit qu'elle est d'ordre 3 car elle comporte 3 termes.

1. Pour chaque entier p compris entre 2 et 5, trouver une suite sexy d'ordre p.

2. En considérant les chiffres des unités, justifier qu'il n'est pas possible de trouver une suite d'entiers premiers sexy d'ordre 5 autre que celle de premier terme 5.

87 On considère, pour n entier naturel, le quotient

$$q_n = \frac{5^{n+1} + 6^{n+1}}{5^n + 6^n}.$$

1. Supposons que le numérateur et le dénominateur sont divisibles par un même entier premier p.
Démontrer qu'alors p divise 5.

AIDE On pourra d'abord montrer que $6 \times 5^n \equiv 5^{n+1}\ (p)$.

2. Déduire de ce qui précède que q_n est irréductible pour tout n entier naturel.

88 ★ Rep-units (1)

On appelle Rep-units les nombres entiers de la forme 11, 111, 1 111... On pose $R_2 = 11$, $R_3 = 111, \dots$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Justifier que, quel que soit $n \geqslant 2$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

2. Comparer R_n à $10^n - 1$.

3. En utilisant **2.**, démontrer que, si n est pair et supérieur ou égal à 4, alors R_n n'est pas premier.

89 ★ Rep-units (2)

On considère de nouveaux les Rep-units R_n définis dans l'exercice 88.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. En justifiant brièvement, citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un Rep-unit.

2. À quelle condition sur n le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du Rep-unit R_n ?

3. En écrivant R_n à l'aide de puissances de 10, écrire $9R_n$ comme une différence pour tout entier n, $n > 1$.

4. a. Déterminer les restes dans la division euclidienne de 10^k par 7 pour k entier compris entre 1 et 8.

b. Soit n un entier strictement positif. Démontrer que :

« $10^n - 1 \equiv 0$ (7) » équivaut à « n est multiple de 6 ».

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que R_n soit un multiple de 7.

90 Rep-units et système binaire

On considère à nouveau les Rep-units R_n, mais on les voit cette fois comme des écritures binaires de nombres (voir le TD 4).

1. Donner l'écriture décimale D_n des R_n pour n compris entre 2 et 10.

2. Conjecturer une formule donnant D_n en fonction de n en observant les résultats obtenus ci-dessus.

3. Démontrer la formule donnant D_n pour tout n.

Congruences et divisibilité

Cours parties 1, 3 et 4

91

Soit n un entier naturel.

On considère les nombres $F(n) = 9^n - 2^n$.

1. À l'aide par exemple d'un tableur, déterminer un entier impair p dont $F(n)$ est multiple pour tout n.

2. Démontrer par récurrence que, quel que soit n, $F(n)$ est divisible par p.

3. Démontrer le même résultat en utilisant les congruences.

Quelle méthode semble être la plus performante ?

92 QCM

Choisir toutes les bonnes réponses.

Soit a un entier relatif tel que $a \equiv -5$ (12).

1. a. $a^{3\,729} - 5^3$ est un multiple de 12.

b. $a^{3\,729} + 5^3$ est un multiple de 12.

c. $a^{3\,729} + 5$ est un multiple de 12.

d. $a^{3\,729} - 5$ est un multiple de 12.

2. Soit p un entier relatif.

Le nombre $3a + p$ est un multiple de 12 si :

a. p est multiple de 12.

b. p est de la forme $-3k + 12$ avec k entier naturel.

c. Le reste dans la division euclidienne de p par 12 est 3.

d. $p - 3$ est multiple de 12.

93

On considère, pour n entier naturel, le nombre entier $5n^3 + n$.

1. Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de n^3 par 6 pour n entier naturel de [0 ; 5].

En déduire les restes dans la division euclidienne de $5n^3$ par 6.

2. En utilisant le **1.**, justifier que, quel que soit l'entier naturel n, $5n^3 + n$ est un multiple de 6.

94

On considère, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, l'entier $A_n = 2n(n^2 + 5)$.

En utilisant par exemple des congruences, démontrer que A_n est divisible par 3 et par 4.

95 Une nouvelle démonstration

Cet exercice propose une nouvelle démonstration d'un résultat du cours (paragraphe 4.b, 4. du théorème).

On admet que, quel que soit n entier avec $n > 1$, on a

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$

1. a. Vérifier cette formule à la main pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$, puis à l'aide d'un logiciel de calcul formel, pour différentes valeurs de n.

b. Soit n un entier naturel non nul et p un entier naturel tel que $p > 1$. On suppose que $a \equiv b$ (n).

En utilisant la formule, prouver que $a^p \equiv b^p$ (n).

2. Démontrer que $4\,578^{3\,569} - 5\,124^{3\,569}$ est un multiple de 13.

96 Preuve par 9

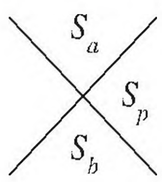
À l'école primaire, on donne la méthode suivante pour vérifier le résultat d'une multiplication de a par b : réaliser une croix comme ci-dessous :

en haut, écrire la « somme réduite » S_a des chiffres de a ;

en bas, écrire la « somme réduite » S_b des chiffres de b ;

à gauche, écrire le « produit réduit » de S_b par S_a ;

à droite, écrire la « somme réduite » S_p du nombre obtenu en multipliant a par b.



Remarque : la « somme réduite » est la somme des chiffres où tout multiple de 9 est remplacé par 0.

La multiplication est réputée bonne si le chiffre de gauche est égal au chiffre de droite.

1. Que représentent mathématiquement la « somme réduite » et le « produit réduit » ?

2. Soit a un nombre et $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ son écriture en base 10. Justifier que a est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

3. Prouver que, si la multiplication de a par b est juste, alors le chiffre de gauche de la croix est égal à celui de droite.

4. Si le chiffre de gauche est égal au chiffre de droite, peut-on affirmer que la multiplication est juste ?
Que dire de l'appellation « Preuve par 9 » ?

97 Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. a. Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

c. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.

d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n n'est pas divisible par 7.

2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

b. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.
En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

98 Divisibilité par 11

Soit $N = \overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ un nombre entier naturel écrit en base 10, les a_i étant donc des nombres compris entre 0 et 9.

1. Déterminer les restes des divisions euclidiennes des puissances de 10 par 11.

2. En déduire que $N \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ modulo 11.
Quel critère permettant de dire si un nombre est divisible par 11 peut-on alors énoncer ?

3. Sans utiliser de calculatrice, dire si le nombre 192 578 936 est divisible par 11.

99 Divisibilité par 25

Soit N un nombre entier naturel, écrit $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ en base 10.
On souhaite démontrer un critère de divisibilité par 25.

1. a. Écrire N comme une somme en utilisant les puissances de 10.

b. Pour n entier naturel, déterminer le reste de 10^n dans la division euclidienne par 25.

c. En déduire un nombre N' tel que $N \equiv N'$ (mod 25).

2. En utilisant **1.**, donner un critère de divisibilité par 25.

3. Les nombres suivants sont-ils des multiples de 25 ?

a. 47 850 **b.** 375 625 **c.** 5 678 912 345

100 Divisibilité par 2^p

On considère un nombre entier naturel N écrit $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ en base 10.

1. Cas où $p = 1$

Déterminer les restes des divisions euclidiennes des puissances de 10 par 2. Retrouver le critère de divisibilité par 2.

2. Cas général

On considère un entier naturel p non nul et on s'intéresse à la divisibilité de N par 2^p.

En utilisant que $10 = 5 \times 2$, justifier que, quel que soit $k \geqslant p$, $10^k \equiv 0\ (2^p)$. En déduire un critère de divisibilité par 2^p.

3. Le nombre 9 876 543 214 897 760 256 est-il divisible par 1 024 ?

101 Divisibilité par 7

Soit $N = \overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ un nombre entier naturel écrit en base 10, les a_i étant donc des nombres compris entre 0 et 9.

1. Déterminer les restes des divisions euclidiennes des puissances de 10 par 7.

2. En déduire que $N \equiv \sum_{k=0}^{n} u_k a_k$ (7), où la suite (u_k) est définie comme suit :

- si k est congru à p modulo 6, alors $u_k = u_p$,
- les 6 premières valeurs de la suite sont données par le tableau ci-dessous :

p	0	1	2	3	4	5
u_p	1	3	2	–1	–3	–2

3. Sans utiliser la calculatrice, dire si les nombres 2 009, 32 123, 482 669 et 200 902 009 sont divisibles par 7.

102 Soit n un entier naturel.

1. a. Trouver, suivant les valeurs de n, les restes de la division de 5^n par 13.
En déduire que $2\,007^{2\,007} - 8$ est divisible par 13.

b. Quel est le reste dans la division euclidienne de $2\,020^{2\,020}$ par 13 ?

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

103 Problème de Calendrier

Arnaud est né le 31 mars 1975. Il voudrait retrouver le jour de la semaine correspondant sachant que le 31 mars 2007 est un samedi.

1. Combien d'années séparent le 31 mars 2007 et le 31 mars 1975 ?

2. Combien d'années bissextiles y a-t-il entre 1975 et 2007 ?

3. a. Combien de jours séparent le 31 mars 2007 et le 31 mars 1975 ?

b. En déduire le nombre de semaines entières entre le 31 mars 2007 et le 31 mars 1975, puis le jour de la semaine où est né Arnaud.

104★ Nombres de Mersenne

On considère les nombres de Mersenne $M_n = 2^n - 1$, pour n entier strictement positif.

1. On s'intéresse aux nombres de Mersenne multiples de 3.

a. À l'aide par exemple d'un tableur, réaliser une conjecture concernant les nombres de Mersenne multiples de 3.

b. Donner, en fonction de n, les restes dans la division de M_n par 3. Conclure.

2. On s'intéresse maintenant aux nombres de Mersenne multiples de 5.

Réaliser une nouvelle conjecture, puis, en considérant les congruences modulo 5, la démontrer.

105 ★ **1.** Déterminer le reste dans la division euclidienne de 5^{16} par 17.

2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 5^{207} par 17.

3. Le nombre $1\,101 \times 5^{207} + 5^{12} \times 7$ est-il divisible par 17 ?

106 ★ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. a. L'entier $(n-1)! + 1$ est-il pair ?

b. L'entier $(n-1)! + 1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?

c. Prouver, sans réaliser la division, que l'entier $(15-1)! + 1$ n'est pas divisible par 15.

d. L'entier $(11-1)! + 1$ est-il divisible par 11 ?

(On n'effectuera pas la division pour justifier la réponse).

2. Soit p un entier naturel non premier ($p \geqslant 2$).

a. Prouver que p admet un diviseur q ($1 < q < p$) qui divise $(p-1)!$.

b. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)! + 1$?

c. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)! + 1$?

Congruences et équations

Cours partie 4

107 **Théorème de Wolstenholme**

Étant donné un entier naturel m, on considère l'équation $mx \equiv 1\ (7^2)$ d'inconnue x.

Si cette équation admet une unique solution entière x entre 0 et 48, on note m^* cette solution.

1. En travaillant par disjonction de cas, justifier que, quel que soit l'entier naturel m compris entre 1 et 6, m^* existe. Réaliser un tableau donnant m^* en fonction de m.

INFO *m^* est appelé l'inverse de m modulo 7^2.*

2. Vérifier que $1^* + 2^* + 3^* + 4^* + 5^* + 6^*$ est divisible par 49.

INFO *Ce résultat est encore valable si on remplace 7 par un entier $p > 3$ premier : on a alors $1^* + 2^* + \ldots + (p-1)^* \equiv 0\ (p^2)$.*

108 ★★ TICE

1. Avec un logiciel ou une calculatrice, résoudre l'équation :

$$10x + 15y + 6z = 113,$$

où x, y et z sont des entiers naturels.

2. Résoudre cette équation en utilisant des congruences judicieusement choisies.

109 On souhaite déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0\ (11)$.

1. Justifier que, si x est un entier naturel, alors $(11-x)^2 \equiv x^2\ (11)$.

2. On suppose qu'un couple $(a\ ;\ b)$ est solution de l'équation.

Donner tous les autres couples solutions que l'on peut en déduire.

3. Dresser un tableau donnant les restes des divisions euclidiennes de x^2 par 11 pour x compris entre 0 et 5.

4. En utilisant les questions précédentes, déterminer les couples d'entiers solutions de l'équation $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0\ (11)$.

110 On appelle N le nombre $x^3 + y^3 + z^3$, où x, y, et z sont trois entiers relatifs.

1. Dans un premier temps, on suppose que $z = 0$.

On se demande s'il existe des couples $(x\ ;\ y)$ tels que $x^3 + y^3$ soit un multiple de 9.

a. Émettre une conjecture, la plus précise possible, à l'aide par exemple d'un tableur.

b. Déterminer les restes de la division euclidienne de x^3 par 9 pour x entier relatif.

En déduire, pour tout entier relatif x, les équivalences suivantes :

$$x^3 \equiv 0\ (9) \Leftrightarrow x \equiv 0\ (3)\ ;$$
$$x^3 \equiv 1\ (9) \Leftrightarrow x \equiv 1\ (3)\ ;$$
$$x^3 \equiv 8\ (9) \Leftrightarrow x \equiv 2\ (3).$$

c. Déduire du **b.** les couples tels que $x^3 + y^3$ soit divisible par 9.

2. On suppose maintenant que z est un entier relatif quelconque.

a. Justifier que, si N est un multiple de 9, alors l'un des nombres x, y ou z est divisible par 3.

b. N peut-il être divisible par 9 si deux des nombres x, y et z sont divisibles par 3 ?

c. Conclure en donnant tous les triplets $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que N soit divisible par 9.

111 ★★ On s'intéresse au nombre de couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions d'une équation (E_z) du type $3x^2 - y^2 = z$, avec z un entier relatif.

1. En utilisant un tableur, donner une valeur de z telle que l'équation admette au moins 3 solutions.

2. a. Justifier que, si $(x\ ;\ y)$ est un couple solution, alors $-y^2 \equiv z\ (3)$.

b. Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de $-y^2$ par 3.

3. Déduire de ce qui précède des valeurs de z telles que l'équation (E_z) n'admette pas de solution.

4. a. On suppose maintenant que z est un multiple de 3.

D'après le **2.**, peut-on affirmer que l'équation (E_z) admet des solutions ?

b. En écrivant $z = 3k$ avec k entier relatif, justifier que $(x\ ;\ y)$ est solution de (E_z) si, et seulement si, $(x\ ;\ y')$ est solution de $x^2 - 3y'^2 = k$ avec y' un entier relatif tel que $y = 3y'$.

c. On suppose maintenant que $z = 30$.

En examinant les congruences modulo 10, justifier que, si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E_{30}), alors x et y sont multiples de 5.

Démontrer que l'on aboutit alors à une contradiction puis conclure.

5. Combien y a-t-il de points à coordonnées entières sur la parabole d'équation $y^2 = 3(x^2 - 10)$?

Problèmes

112 Des puissances de 2

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le nombre $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a. Si $p = 3n$ avec n entier naturel, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

b. Démontrer que si $p = 3n + 1$ avec n entier naturel, alors A_p est divisible par 7.

c. Étudier le cas où $p = 3n + 2$, avec n entier naturel.

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire : $a = \overline{1001001000}$ et $b = \overline{1000100010000}$.

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. Sont-ils divisibles par 7 ?

113 Codes-barres

Les codes-barres d'étiquetage des produits reposent en général sur les codes EAN 13, EAN signifiant *European Article Numbering*. Les 13 chiffres qui composent ces codes ont souvent la signification suivante :

- les trois premiers permettent d'identifier par exemple le pays de provenance du produit.
- Les quatre suivants sont le numéro de l'entreprise.
- Les 5 suivants sont le numéro d'article du produit.
- Le treizième chiffre est, quant à lui, une clé de contrôle calculée à partir des 12 chiffres précédents.

Pour calculer la clé de contrôle, on procède comme suit : notons $a_1a_2...a_{12}x$ le code barre de 13 chiffres.

On commence par déterminer le chiffre des unités u de $N = 3\sum_{k=1}^{6} a_{2k} + \sum_{k=1}^{6} a_{2k-1}$, puis on calcule $10 - u$, ce qui donne la clé x du code.

1. Déterminer la clé de contrôle x de 329 4565 12357 x.

2. Indiquer un code barre différent ayant la même clé.

3. Justifier que x est le reste dans la division euclidienne de $-N$ par 10.

4. Combien d'articles différents une même entreprise peut-elle identifier à l'aide d'un code-barre EAN 13 ?

5. Sur l'étiquette d'un produit, l'un des chiffres est illisible : 329 2a458 1235 7. Peut-on retrouver la valeur de a ?

6. Cette fois, on a le code 329 2ab58 1235 7.

Peut-on trouver a et b ?

7. On suppose que, lors de la saisie du code, on a interverti deux chiffres.

a. Au lieu de saisir $a_1a_2...a_{12}x$, on a saisi $a_2a_1...a_{12}x$.

L'erreur sera-t-elle détectée ?

b. Même question si on a saisi $a_3a_2a_1...a_{12}x$ au lieu de $a_1a_2a_3...a_{12}x$.

114 Numéro INSEE

Le numéro INSEE est un numéro attribué à chaque individu. Il est constitué de 15 chiffres : le premier (1 ou 2) désigne le sexe, les quatre suivants, l'année et le mois de naissance, puis cinq chiffres désignent le département et la commune de naissance, trois chiffres le numéro d'enregistrement dans cette commune. Enfin, les deux derniers forment une clé de contrôle.

Nous appellerons N le nombre constitué par les 13 premiers caractères (c'est-à-dire le nombre « sans la clé »).

La clé de contrôle, constituée de deux chiffres, est obtenue comme suit : on calcule le reste r dans la division euclidienne de N par 97 et la clé de contrôle est égal à $97 - r$.

1. Calculer la clé de contrôle du numéro INSEE (sans clé) :

1 06 08 41 326 145

2. Alexandre s'est trompé en écrivant son numéro INSEE : au lieu de d'écrire 1 66 08 41 512 145 20, il a écrit 1 66 08 41 612 145 20. L'erreur sera-t-elle détectée ?

3. De l'eau a rendu illisible l'un des chiffres du code de Bernard. Si on note a ce chiffre, le numéro INSEE de Bernard est 1 a5 10 41 120 023 42. On pose N = 1a51041120023.

a. Justifier que l'on doit avoir $N \equiv 55\ (97)$.

b. Déterminer les restes dans la division euclidienne de 10^n par 97 pour n compris entre 0 et 12.

En déduire que $N \equiv 15 + 5a\ (97)$.

c. Peut-on déduire de ce qui précède le chiffre manquant, puis l'année de naissance de Bernard ?

4. Un homme et une femme sont nés le même jour de la même année, dans la même commune. L'un a pour numéro INSEE 1 *ab cd ef ghi* 205 u et l'autre 2 *ab cd ef ghi* 206 v, où u et v désignent les clés INSEE et a, b, c, d, e, f, g, h et i sont des chiffres. Donner une formule reliant u et v.

115 Un livre de David A. Cox

David A. Cox a écrit un livre concernant les nombres premiers de la forme

$F_d(x\,;\,y) = x^2 + dy^2$ avec x, y et d entiers naturels.

On s'intéresse ici aux nombres de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ qui peuvent se mettre sous cette forme.

1. On suppose dans cette question que $d = 1$.

a. Donner les restes dans la division euclidienne de $F_1(x\,;\,y)$ par 4 pour x et y entiers naturels.

b. Donner les restes dans la division euclidienne de M_n par 4 pour n entier naturel.

c. Existe-t-il des nombres de Mersenne qui peuvent se mettre sous la forme F_d ? Si oui, lesquels ?

2. On suppose maintenant que $d = 2$.

a. Justifier qu'il existe n tel que $M_n = F_d(x\,;\,y)$.

Donner n, x et y.

b. Supposons qu'il existe deux couples distincts $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$ tels que $M_n = x^2 + 2y^2$ et $M_n = x'^2 + 2y'^2$.

Justifier que l'on a forcément $x \neq x'$ et $y \neq y'$.

Prouver que $x' - x$ est pair et non nul. En déduire que $x^2 - x'^2$ est un multiple de 4 non nul, puis que $y^2 - y'^2$ est un multiple de 4. En poursuivant le raisonnement, justifier qu'il ne peut pas exister deux couples distincts.

116 Nombres de la forme $a^2 + 9$

On appelle $\mathscr{E}$ l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$...

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de $\mathscr{E}$ qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

On considère, pour b valant 2, 3 ou 5, l'équation (E_b) d'inconnu a : $a^2 + 9 = b^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Cas où $b = 2$ et $n \geqslant 4$.

a. Montrer que si a existe, alors a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Cas où $b = 3$ et $n \geqslant 3$.

a. Montrer que si $n \geqslant 3$, alors 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geqslant 2$.

Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Cas où $b = 5$ et $n \geqslant 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$; en s'inspirant de **2. c.** démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

117 ★ Spirale d'Ulam

1. On souhaite reproduire et compléter le tableau suivant en écrivant les 200 premiers entiers naturels : les nombres entiers sont écrits « en spirale », comme l'avait fait le mathématicien Ulam (1963) lors d'une conférence.

16	15	14	13
5	4	3	12
6	1	2	11
7	8	9	10

a. Combien faudra-t-il de lignes et de colonnes pour écrire les 200 premiers entiers ?

b. À l'aide d'un tableur, réaliser rapidement cette spirale.

2. Colorier les nombres premiers.

3. Ulam a observé que les nombres premiers sont répartis sur des « diagonales ».

On se propose de considérer la « demi-diagonale » $D_{5,19}$ issue de 5 et passant par 19 et de déterminer une formule donnant tous les nombres de cette « demi-diagonale ».

a. On note C_0 le carré constitué de la case 1, C_1 le carré constitué des cases 1 à 9, C_2 le carré constitué des cases 1 à 25...

Soit n un entier naturel. Combien de cases supplémentaires comporte le carré C_{n+1} par rapport au carré C_n ?

b. On note $u_0 = 5$, $u_1 = 19$, $u_2 = 41$... les nombres de $D_{5,19}$ et on pose $d_n = u_{n+1} - u_n$.

Donner une formule donnant d_{n+1} en fonction de d_n et en déduire d_n en fonction de n.

Exprimer alors u_{n+1} en fonction de u_n et de n.

c. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 14 + 8n$ pour tout entier naturel n.

À l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice, placer les points A_n $(n\,;\,u_n)$ pour n entier naturel compris entre 0 et 10.

Conjecturer une expression donnant u_n en fonction de n, puis démontrer la formule obtenue.

d. Donner le pourcentage de nombres premiers parmi les 21 premières valeurs de u_n.

118 ★★ Des caméléons sur une île

Sur une île en Mathématie vivent 45 caméléons. Chacun peut adopter trois couleurs différentes : jaune, gris et bleu.

Cependant, le changement de couleur n'intervient que dans des circonstances particulières :

si deux caméléons de deux couleurs différentes se rencontrent, ils adoptent en effet la troisième couleur.

1. Au départ, sur l'île, il y a 17 caméléons jaunes, 15 caméléons gris et 13 caméléons bleus.

Un biologiste, naufragé sur l'île, décide d'attendre pour voir s'ils arrivera un moment où, à force de rencontres, ils auront tous la même couleur.

a. On suppose que, au bout de k rencontres (k entier supérieur ou égal à 0), il y a j_k caméléons jaunes, g_k caméléons gris et b_k caméléons bleus.

En étudiant tous les cas possibles, exprimer j_{k+1}, g_{k+1} et b_{k+1} en fonction de j_k, g_k et b_k.

b. En déduire que, quel que soit k, $j_{k+1} - g_{k+1}$ est égal ou à $j_k - g_k$ ou à $j_k - g_k - 3$ ou encore à $j_k - g_k + 3$.

Que peut-on dire de $j_{k+1} - b_{k+1}$, de $g_{k+1} - b_{k+1}$?

Quelles égalités peut-on en déduire modulo 3 ?

c. À quoi sont congrus, modulo 3, $j_0 - g_0$, $j_0 - b_0$ et $g_0 - b_0$? Si, au bout de n rencontres, tous les caméléons étaient de la même couleur, à quoi seraient congrus, modulo 3, $j_n - g_n$, $j_n - b_n$ et $g_n - b_n$?

d. Combien de temps le biologiste va-t-il attendre ?

2. En fait, le biologiste a amené un caméléon jaune avec lui.

a. Reprendre la question **c.** en considérant 18 caméléons jaunes, 15 gris et 13 bleus.

b. Déterminer le nombre minimal de rencontres nécessaires pour qu'il n'y ait plus que des caméléons bleus.

c. Est-il possible qu'il ne reste plus que des caméléons jaunes ? Que des caméléons gris ?

Hors piste

119 ★ On considère les nombres de la forme

$$A(n) = n^2 + n + 41.$$

1. Tester le caractère premier de $A(n)$ pour n compris entre 0 et 15. Émettre alors une conjecture concernant le caractère premier des $A(n)$.

2. Justifier qu'il existe n tel que $A(n)$ n'est pas premier.

3. En s'inspirant de la spirale d'Ulam (exercice 117), créer une spirale (ne commençant pas nécessairement à 1) ayant pour « diagonale » les $A(n)$.

Type BAC

120 ROC Restitution organisée de connaissances

QUESTION DE COURS

Prérequis : Définition d'un nombre premier.

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

APPLICATION

1. Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2.
Démontrer que p est congru à 1 ou à -1 modulo 4.
Donner deux exemples de chacun de ces cas.

2. Le but de ce qui suit est de répondre à la question suivante : « Les nombres premiers p congrus à -1 modulo 4 sont-ils en nombre fini ? »

Supposons que ce soit le cas : soit n le nombre des nombres premiers congrus à -1 modulo 4, notons $A = p_1p_2 \dots p_n$ le produit de ces nombres et $B = 4A - 1$.

a. Montrer que B est congru à -1 modulo 4.

b. Soit q un diviseur premier de B. Montrer que q est distinct de chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$ précédents.
Montrer que parmi les diviseurs premiers de B, l'un au moins est congru à -1 modulo 4.

c. Quelle réponse apporter à la question posée ?

121 VRAI OU FAUX ?

Pour chacune des propositions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier par une démonstration ou un contre-exemple.

Soit n et b des entiers naturels non nuls.

1. Si le reste dans la division euclidienne de n par b est 2, alors le reste dans la division euclidienne de n^2 par b est 4.

2. Si $n^2 \equiv 4\ (b)$, alors $n \equiv 2\ (b)$.

122 VRAI OU FAUX ?

Répondre par Vrai ou Faux, et justifier la réponse. Dans toutes les questions, a et b désignent des entiers relatifs, n un entier naturel.

a. Si p et q sont deux entiers naturels tels que $p \equiv q\ (n)$, alors $a^p \equiv a^q\ (n)$.

b. Si $a \equiv 0\ (4)$, alors $a \equiv 0\ (2)$.

c. Si $a \equiv 0\ (2)$, alors a n'est pas congru à 0 modulo 3.

d. Si $ab \equiv 0\ (n)$, alors $a \equiv 0\ (n)$ ou $b \equiv 0\ (n)$.

123 ROC Restitution organisée de connaissances

QUESTION DE COURS

Prérequis : Définition des congruences.

Démontrer les assertions :

1. Si $a \equiv b\ (n)$ et $c \equiv d\ (n)$, alors $a + c \equiv b + d\ (n)$.

2. Si $a \equiv b$, (n) alors $a^2 \equiv b^2\ (n)$.

APPLICATION

1. Déterminer, en fonction des valeurs de n, les restes dans la division euclidienne de n^2 par 7.

2. En déduire les valeurs de n telles que $n^2 + n - 5$ soit un multiple de 7.

124 ROC Restitution organisée de connaissances

QUESTION DE COURS

Prérequis : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \pmod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

Soit a, b, c et d des entiers relatifs.

1. Démontrer que si $a \equiv b \pmod 7$ et $c \equiv d \pmod 7$, alors $ac \equiv bd \pmod 7$.

2. En déduire que, pour a et b entiers relatifs non nuls, si $a \equiv b \pmod 7$, alors pour tout entier naturel n,

$$a^n \equiv b^n \pmod 7.$$

APPLICATION

1. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \pmod 7$.

2. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que $a^6 \equiv 1 \pmod 7$.

b. On appelle *ordre* de a mod 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod 7$.
Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod 7$. En déduire que k divise 6.
Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

3. À tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \pmod 7$.

125 EP Épreuve pratique TICE

On s'intéresse aux nombres de la forme $u_k = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, pour k entier naturel.

1. a. En utilisant un tableur, faire afficher les valeurs de u_k pour k compris entre 0 et 100.

b. Que peut-on conjecturer concernant les u_k ?

c. Conjecturer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que u_k se termine par 6.

2. On se propose de démontrer la première conjecture par deux méthodes différentes.

a. Réaliser un tableau donnant les restes de $k + 1$ et de $2k + 1$ dans la division euclidienne par 6 pour k entier compris entre 0 et 5.

b. En déduire que $k(k + 1)(2k + 1)$ est un multiple de 6 puis conclure.

c. En adaptant la méthode précédente, démontrer la conjecture du **1. b.** concernant la parité des u_k.

d. Démontrer par récurrence que, quel que soit k, $\sum_{n=1}^{k} n^2 = u_k$.

En déduire une deuxième démonstration du **2.b.**

3. Démonstration de la conjecture du **1.c.**

a. En utilisant le tableur, réaliser un tableau donnant le dernier chiffre de u_k pour k compris entre 0 et 20.

b. En déduire une justification de la conjecture du **1.c.**

PRODUCTION DEMANDÉE

- tableau de valeurs et conjectures du **1.**,
- démonstrations des **2.** et **3.**

126 EP Épreuve pratique TICE

On considère une suite (u_n) définie comme suit : u_0 est un entier naturel non nul et, pour tout entier naturel n, u_{n+1} est égal à $\frac{u_n}{2}$ si u_n est pair et à $3u_n + 1$ sinon.

1. En utilisant un tableur réaliser un tableau donnant les 20 premières valeurs de u_n en fonction des valeurs de u_0 pour u_0 entier entre 1 et 10.

2. En observant les résultats obtenus, quelle conjecture peut-on faire ?

Dans la suite de l'énoncé, on ne suppose plus que u_0 est un entier entre 1 et 10, sauf pour **3.a.**

3. Soit u_0 tel qu'il existe un entier naturel $k > 0$ tel que $u_k = 1$. On note p le plus petit entier tel que $u_p = 1$.

a. Donner les valeurs de p pour u_0 entier entre 1 et 10.

b. Conjecturer les valeurs de u_0 telles que la suite des valeurs $(u_0 ; u_1 ;... ; u_p)$ soit strictement décroissante.

c. Que peut-on dire des valeurs de u_0 telles que la suite des valeurs $(u_1 ; ... ; u_p)$ soit strictement décroissante mais pas la suite $(u_0 ; u_1 ;... ; u_p)$?

4. a. Démontrer la conjecture du **3.b.**

b. Justifier que, pour m entier naturel tel que $m > 1$, on a

$$2^m - 1 = \sum_{k=0}^{m-1} 2^k .$$

c. Justifier que, quel que soit l'entier naturel n, $2^{2n} + 2^{2n+1}$ est un multiple de 3.

En déduire les valeurs de m telles que $2^m - 1$ soit divisible par 3.

d. Quelle équation doit vérifier u_0 pour que la suite vérifie les conditions du **2.c** ?

En déduire 10 valeurs de u_0 qui conviennent.

PRODUCTION DEMANDÉE

- construction du tableau des suites,
- rédaction des conjectures du **2.** et du **3.**,
- démonstrations du **4.**

127★ EP Épreuve pratique TICE

On considère la suite d'entiers (u_n) définie par $u_0 \geqslant 4$ et, quel que soit $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. a. À l'aide d'un tableur, conjecturer une valeur de a telle que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - a$ soit une suite géométrique.

b. Conjecturer les valeurs de u_0 telles que, quel que soit l'entier naturel n, 3^{u_n} soit le cube d'un entier naturel.

2. On suppose maintenant que $u_0 = 4$.
Émettre une hypothèse concernant les valeurs de n telles que $3^{u_n} - 1$ soit divisible par 11.

3. Démontrer la conjecture du **1.a.**, et en déduire l'expression de u_n en fonction de n et u_0. Prouver alors que, quel que soit n, u_n est un entier naturel.

4. a. Démontrer par récurrence que, si u_0 est un multiple de 3, alors pour tout n, u_n est un multiple de 3.
En déduire une condition suffisante pour que, quel que soit l'entier naturel n, 3^{u_n} soit le cube d'un entier naturel.

b. Démontrer que, si, pour un certain entier naturel n, 3^{u_n} est un cube, alors u_n est un multiple de 3. Conclure.

5. a. Déterminer les restes dans la division euclidienne de 3^k par 11 pour k entier naturel.

b. Démontrer que $u_n \equiv 0 \ (5)$ si, et seulement si, $n \equiv 1 \ (4)$.

c. Conclure.

PRODUCTION DEMANDÉE

- conjectures du **1.** au tableur,
- démonstrations **3.**, **4.** et **5.**

128 TICE

Soit N un entier naturel non nul. On considère l'algorithme suivant, qui donne, à l'étape 4, un nombre noté A_N dans la suite :

```
1. Initialiser A et K en leur donnant la valeur N
2. Tant que K > 2 :
    Donner à K la valeur K–1
    Donner à A la valeur A × K
3. Donner à A la valeur A–1
4. Afficher A
```

1. Programmer cet algorithme et compléter un tableau donnant les A_i pour i entier entre 1 et 10.

2. Donner une expression de A_N en fonction de N.

3. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

a. Il existe des valeurs de N pour lesquelles A_N est un nombre premier.

b. Quel que soit N, A_N est un nombre premier.

c. Quel que soit l'entier naturel non nul N, si N est premier, alors A_N est premier.

d. La réciproque du **c.** est fausse.

4. Étudier la parité des nombres A_N.

129 EXERCICE OUVERT

Lors de ses recherches généalogiques dans un vieux registre auquel il manque de nombreuses pages, Armand a découvert l'acte de baptême de son ancêtre Auguste le Vieux.
Il est parvenu à déchiffrer la date : vendredi 12 juin ; mais l'année ne figure pas dans les actes et la première page de l'année a été arrachée.
Peut-on retrouver l'année sachant qu'elle se situe strictement entre l'année 1720 et l'année 1725 ?

130 EXERCICE OUVERT

Bertrand a dit à son ami Jean qu'il viendrait lui rendre visite, mais qu'il doit trouver lui-même le jour où il viendra. Pour cela, il doit numéroter tous les jours de 1 à 365 et écrire les numéros en bleu dans un tableur, puis travailler à l'aide de deux couleurs : bleu et rouge.

Il doit faire successivement tout ce qui suit :

- changer de couleur tous les multiples de 2,
- changer de couleur tous les multiples de 3,
- changer de couleur tous les multiples de 4,
- changer de couleur tous les multiples de 5, et ainsi de suite.

Bertrand viendra le 17e jour de l'année écrit en bleu.
Quel est ce jour ?

Durée : 30 minutes

ROC

ATTENTION

Il s'agit ici d'un cas particulier du théorème du cours concernant la division euclidienne : a est un entier naturel et le diviseur est 7.

Prérequis : Propriétés de divisibilité. Si a est un entier naturel, il existe un couple d'entiers naturels $(q\,;\,r)$ tel que $a = 7q + r$ et $0 \leqslant r < 7$.

Démontrer la propriété suivante : le couple $(q\,;\,r)$ est unique.

Application

AIDE

$a = 7q$; $b = r$. Il n'y a qu'un terme qui n'est pas multiple de 7. C'est lui qui va donner le reste.

1. Effectuer la division euclidienne de 13 457 par 7.
2. Soit a et b des nombres réels. Développer $(a + b)^4$.
3. Sans utiliser les congruences, mais en utilisant les deux questions précédentes et la propriété, justifier que le reste dans la division de $13\,457^4$ par 7 est 4.

Durée : 45 minutes

Vrai ou faux ?

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

AIDE

Toujours commencer par tester pour quelques valeurs.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$.

Proposition 2 : Si un entier relatif x est solution de l'équation $2x^2 + 1 \equiv 0\ (11)$, alors $2x^2 \equiv 0\ (10)$.

Proposition 3 : Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0$ modulo 6, alors $x \equiv 0$ modulo 3.

AIDE

On peut simplifier la question !

Proposition 4 : Soit deux entiers naturels M et N tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.
Si l'entier M est divisible par 27, alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27.

Proposition 5 : Soit a et b deux entiers relatifs. Si $a^2 \equiv b^2\ (9)$, alors $a \equiv b\ (3)$.

Proposition 6 : Soit n un entier naturel non nul. Alors $n! + 1$ est un nombre premier.

Durée : 45 minutes

EXERCICE

1. Soit n un entier strictement supérieur à 1.
On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 6.

AIDE

Travailler avec les chiffres des unités ou modulo 10.

ATTENTION

Raisonner par double implication. L'une des implications nécessite une disjonction des cas.

a. Quel est nécessairement le chiffre des unités de n ? Le démontrer.
b. Justifier qu'il existe un entier k tel que n s'écrive sous la forme $10k + 4$ ou $10k - 4$.
c. Démontrer alors que le chiffre des unités de n^2 est 6 si, et seulement si, $n^2 + 4$ est un multiple de 20.

2. Soit $n \geqslant 2$. On appelle R_n le nombre égal à $6 \times \dfrac{10^n - 1}{9}$.

a. Justifier que, quel que soit n entier supérieur ou égal à 2, R_n est un entier.
Comment peut-on écrire R_n autrement ?

AIDE

Utiliser la deuxième écriture et les congruences...

b. Quel est le reste de la division de R_n par 20 ?
c. En utilisant le résultat de la question 1.c., déduire de ce qui précède qu'aucun des R_n n'est un carré.

EP Épreuve pratique TICE

À tout entier naturel n non nul, on applique l'algorithme suivant :

> Si $n = 1$, le processus s'arrête, sinon :
> – si n est pair, on le transforme en $\frac{n}{2}$,
> – si n est impair, on le transforme en $3n + 1$.

On note alors n le résultat obtenu et on applique de nouveau l'algorithme à ce n.
Lorsque, pour l'entier de départ n, l'algorithme aboutit à 1, on appelle « suite de Syracuse associée à n » la suite (finie) des entiers rencontrés pour passer de n à 1.
On note $L(n)$ le nombre d'entiers de cette suite ; on dit que $L(n)$ est la longueur de la suite de Syracuse associée à n.
Exemple : pour $n = 5$, on obtient les nombres 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1 et donc $L(5) = 6$.

AIDE
Utiliser la fonction = SI(test ; valeur si vrai ; valeur si faux) pour compléter les cases.

1. a. À l'aide d'un tableur, appliquer cet algorithme aux entiers compris entre 1 et 10.
b. Réaliser une feuille de calcul donnant les suites de Syracuse des 100 premiers entiers.
c. Préciser les valeurs de $L(26)$ et $L(27)$.

Appeler l'examinateur pour vérification du tableau construit

2. Étude de cas particuliers relatifs aux longueurs des suites $L(n)$ pour n entier naturel.
a. Que vaut $L(2^p)$ pour p entier naturel non nul ?
b. Quelle conjecture peut-on faire concernant $L(8k + 4)$ et $L(8k + 5)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$?
c. Démontrer la conjecture émise au **2.b.**

3. Démontrer que, si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0, 1 ou 2, alors l'algorithme amène nécessairement, au bout d'un certain nombre d'étapes, à un entier strictement inférieur à n.

PRODUCTION DEMANDÉE
- construction du tableau des suites de Syracuse pour les 10 premiers entiers (le tableau pour les 100 premiers entiers sera simplement visé par l'examinateur),
- énoncé des conjectures du **2.**,
- preuve de **2. b** et **3.**

PISTES ET CONSEILS

VRAI OU FAUX ?

Proposition 4 : Il suffit de prouver que N est congru à 0 modulo 27. Pour cela, on exprime par exemple c en fonction de a et b grâce à l'égalité $M \equiv 0$ (27) puis on remplace dans l'expression de N.

Proposition 6 : Ne pas confondre avec la démonstration réalisée dans le cours pour démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

ÉPREUVE PRATIQUE

Pour mieux voir ce qui se passe dans le tableau de 100 valeurs, on peut utiliser un double test qui affiche par exemple « FIN » si le nombre précédent vaut 1 et applique l'algorithme sinon.
Exemple de syntaxe : SI(A1 = 1 ; "FIN" ; SI(MOD(A1 ; 2) = 0 ; A1/2 ; 3*A1 + 1))
En particulier, penser aux guillemets pour faire afficher du texte.

TICE

Voir les TICE, p.131

Extraire les chiffres d'un nombre

FICHIERS disponibles sur le site www.bordas-pixel.fr/TleS : Solutions sous les logiciels OpenOffice, Excel, TI-nspire et les calculatrices TI 82, TI 89, Casio Graph 35.

Fonction MOD(*x* ; *y*)

Avec un tableur, on peut obtenir directement le reste dans la division euclidienne d'un entier *x* par un entier *y* en tapant **= MOD(*x* ; *y*)**.
Grâce à cette fonction, il est facile d'obtenir le chiffre des unités de n'importe quel nombre. En effet, le chiffre des unités d'un nombre est égal à son reste dans la division euclidienne par 10.

Division euclidienne

Au tableur

Saisir le nombre en A1, le diviseur en B1.
En C1 : **= ENT(A1/B1)**, qui donne le quotient ; en C2 : **= MOD(A1 ; B1)**, qui donne le reste.

C2 = =MOD(A1;B1)

	A	B	C
1	1278	19	67
2			5

À la calculatrice

Pour obtenir le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier relatif *a* par un entier naturel non nul *b*, on utilise l'algorithme ci-contre. Écrire le programme correspondant dans la calculatrice.

AIDE les commandes sont rappelées dans les TICE p. 131.
Pour la partie entière, voir « le cours en action » partie 3.

Demander *a*
Demander *b*
$E(a/b) \to q$
$a - bq \to r$
Afficher *q* et *r*

Extraire un chiffre d'un nombre entier naturel

Par exemple, donner séparément le chiffre des unités, des dizaines et des centaines d'un nombre entier naturel fixé.

Au tableur

Le chiffre des unités *u* d'un nombre entier naturel *n* est le reste de *n* dans la division euclidienne par 10. Le nombre $n - u$ est alors un multiple de 10. Le chiffre des unités de $\frac{n-u}{10}$ est donc le chiffre des dizaines *d* de *n*...
Construire la feuille de calcul ci-contre. Les formules des cellules B2, C2 et D2 sont « recopiées » vers le bas.

D2 fx =MOD((A2-B2-10*C2)/100;10)

	A	B	C	D
1	n	chiffre unités	chiffre dixaines	chiffre centaines
2	12	2	1	0
3	456	6	5	4
4	7898	8	9	8

À la calculatrice

L'algorithme suivant donne successivement les chiffres des unités, dizaines et centaines du nombre *n* donné.

Demander *n*
Pour *p* allant de 1 à 3
  $n - E(n/10) \times 10 \to r$
  Afficher *r*
  $(n - r)/10 \to n$

• Expliquer comment cet algorithme répond au problème posé.
• Écrire le programme correspondant dans la calculatrice (instruction **For**). Vérifier sur quelques exemples.
L'écran de calculatrice ci-contre donne bien les chiffres des unités, dizaines et centaines du nombre 7 589.

```
prgmCHIFFRE
N=7589
                9
                8
                5
             Done
```

Applications

a. Modifier le programme de la calculatrice pour faire afficher en plus de ceux déjà affichés, le chiffre des milliers.
b. Avec une calculatrice, faire afficher le chiffre des milliers de *n* ! pour *n* entier compris entre 8 et 12.
c. Dans un tableur, faire afficher le *nombre* de dizaines, puis le *nombre* de centaines de *n* ! pour *n* compris entre 4 et 12.

PGCD • PPCM

2



Une vue de la nouvelle bibliothèque. Alexandrie fut réputée dans l'Antiquité pour la richesse de sa bibliothèque et la présence de nombreux savants grecs dont Euclide.

Culture et Mathématiques

Avant de commencer

Le cours

Les TICE du chapitre

Retrouver les solutions des exercices repérés par www. sur :
www.bordas-pixel.fr/TleS

Cryptographie

L'idée de protéger une communication, quelle qu'elle soit, par un code graphique secret remonte à la plus haute antiquité. Le lien entre les mathématiques et la cryptographie s'est sans doute établi tôt (notamment dans les milieux ésotériques). À la fin du XVe siècle, le mot « chiffre », tiré des mathématiques arabes, a pris au singulier (*le chiffre*) le sens d'écriture secrète codifiée. L'histoire de la cryptologie montre une grande variété des méthodes et des outils de chiffrement, depuis l'hélice de l'antique bâton de Plutarque, jusqu'aux nombres premiers du système moderne RSA.

À la Renaissance



■ À la Renaissance deux illustres érudits, connus pour d'autres travaux majeurs, ont proposé des méthodes de chiffrement et de déchiffrement.

Leon Battista Alberti (1404-1472), le premier théoricien de la perspective, a aussi été le premier à rédiger un ouvrage intitulé *De Componendis Cyphris* contenant une table des fréquences des lettres et une méthode polyalphabétique de cryptage où la lettre de rang n du texte à crypter, qui est la $i^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet est remplacée par la $j^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet en fonction à la fois de i et de n.

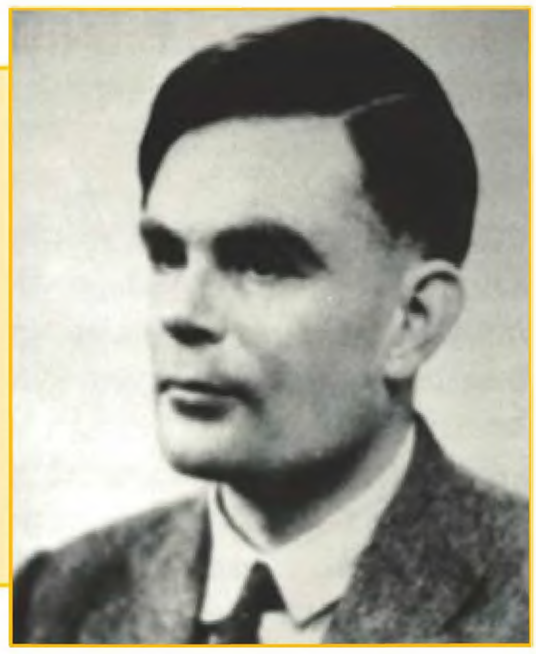
Au XVIe siècle

■ François Viète (1540-1603), le fondateur de l'algèbre, est juriste. Il devient en 1594 maître des requêtes et membre du conseil privé d' Henri IV et à ce titre fut chargé par le roi de déchiffrer notamment le courrier entre le roi d'Espagne et la Ligue catholique (Avec succès ! Le roi d'Espagne l'accusa de sorcellerie auprès du pape). Peu avant de mourir, il rédigea un mémoire adressé à Sully dans lequel il décrivait « *la manière de descouvrir les chiffres d'Espagne et d'Italie pour le bien du service du Roy et de l'Estat de la France* ». Il y utilisait une méthode rigoureuse et mathématisée. On le considère comme l'inventeur de la cryptanalyse mathématique.



À la seconde guerre mondiale

■ L'aspect diplomatique et militaire du (dé)cryptage de l'information a toujours été important. Lors de la seconde guerre mondiale, pour déchiffrer rapidement les messages codés par les allemands au moyen des machines électromécaniques Enigma, le mathématicien Alan Turning (1912-1954) conçut Colossus, le premier ordinateur.



Aujourd'hui



■ À notre époque, l'aspect financier et commercial du cryptage (par exemple pour identifier les détenteurs de cartes bancaires ou pour sécuriser les communications informatiques) s'est considérablement renforcé. Les mathématiciens ont conçu divers systèmes dont le plus connu est le **R.S.A.** inventé en 1978 par Ronald **R**ivest, Adi **S**hamir et Leonard **A**dleman (au Massachusetts Institute of Technology).

■ Ce système repose sur le fait qu'il est facile à partir de deux très grands nombres premiers p et q de calculer leur produit $N = pq$, mais qu'inversement, même avec de puissants et nombreux ordinateurs, on n'est pas, à l'heure actuelle, capable de déterminer p et q connaissant N.

Prenons un exemple extrêmement simplifié.

Si Anouk veut recevoir un message codé de Barnabé, elle choisit deux grands nombres premiers p et q (d'une centaine de chiffres chacun) et un nombre e premier avec p–1 et q–1.

Supposons que le choix d'Anouk soit $p = 197$ et $q = 281$ (trop petits pour assurer la sécurité du cryptage) et $e = 3$. La clef publique d'Anouk est alors (RSA, N, e) = (RSA , 55357, 3) que Barnabé connaît.

Barnabé va d'abord transformer son message en nombres en remplaçant chaque lettre par son rang alphabétique (ou mieux en utilisant le code ASCII). Par exemple : « Tu as gagné au loto » devient « 20 21 01 19 07 01 07 14 05 01 21 12 15 20 15 ». Ce message chiffré est alors découpé en blocs de même taille représentant chacun un nombre inférieur à N mais assez voisin : 20210 11907 01071 40501 21121 52015.

Considérons un des blocs, par exemple le premier $B = 20210$, Barnabé le remplace par le reste C de la division de B^3 par N. (on trouve donc $C = 50891$).

Pour décoder ce premier nombre C, envoyé par Barnabé, Anouk se sert du nombre entier $d = (2(p–1)(q–1) +1)/3$.

Elle seule le connaît puisque elle seule connaît p et q (dans cet exemple $d = 36587$). B est en effet le reste de la division de C^d par N. En travaillant bloc par bloc, elle retrouve le message chiffré de Barnabé puis son message littéral.

TD 3 p.56

Ressources

- Jean-Pierre Delahaye, *Les merveilleux nombres premiers*, Belin
- Simon Singh, *Histoire des codes secrets*, J-C Lattès
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Rivest_Shamir_Adelman
- Hors-série n°26 de la revue Tangente, *Cryptographie & codes secrets*, Pole.

1 **Calculer et utiliser un PGCD**

Déterminer le PGCD de n_1 et n_2 puis rendre irréductible la fraction $\frac{n_1}{n_2}$ dans chacun des cas suivants. Vérifier les résultats obtenus à l'aide d'une calculatrice.

a. $n_1 = 27$ et $n_2 = 12$ b. $n_1 = 3\,087$ et $n_2 = 1\,386$ c. $n_1 = 12\,325$ et $n_2 = 44\,370$

2 **Utiliser le PCGD dans un cas concret**

Un vendeur réalise des pizzas rectangulaires de dimensions 98 cm sur 56 cm. Il souhaite les découper en parts carrées identiques d'aire la plus grande possible.
Quelle doit être la mesure du côté du carré ?

3 **Résoudre une équation dans $\mathbb{Z}$ sans transformation préalable**

Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ solutions des équations suivantes :

a. $xy = 6\,615$ et $x \leqslant y$ b. $x(y-2) = 45$ c. $x^2 = 252y$ et $|x| \leqslant 213\,444$

4 **Résoudre une équation dans $\mathbb{Z}$ avec transformation préalable**

Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ solutions des équations suivantes :

a. $x^2 - y^2 = 13$ b. $x^2 - y^2 = 30$ c. $9x^2 - 4y^2 = 44$

AIDE Factoriser le membre de gauche, puis utiliser la décomposition en facteurs premiers.

5 **Déterminer le nombre de diviseurs d'un entier**

Préciser le nombre de diviseurs des nombres suivants :

a. 97 b. 970 c. 850 500

6 **Résoudre une équation à une inconnue avec les congruences**

On considère l'équation $x^3 \equiv -1(7)$, d'inconnue x entière.

a. Soit x un entier tel que $0 \leqslant x \leqslant 6$; déterminer les restes possibles de x^3 dans la division euclidienne par 7.

b. En utilisant a., déterminer l'ensemble des entiers relatifs solutions de l'équation de départ.

7 **Résoudre une équation à deux inconnues avec les congruences**

On considère l'équation d'inconnues x et y entières $(E) : 3x - 7y = 142$.

a. Justifier que, si $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors $-7y \equiv 1(3)$.

b. Résoudre cette équation dans $\mathbb{Z}$.

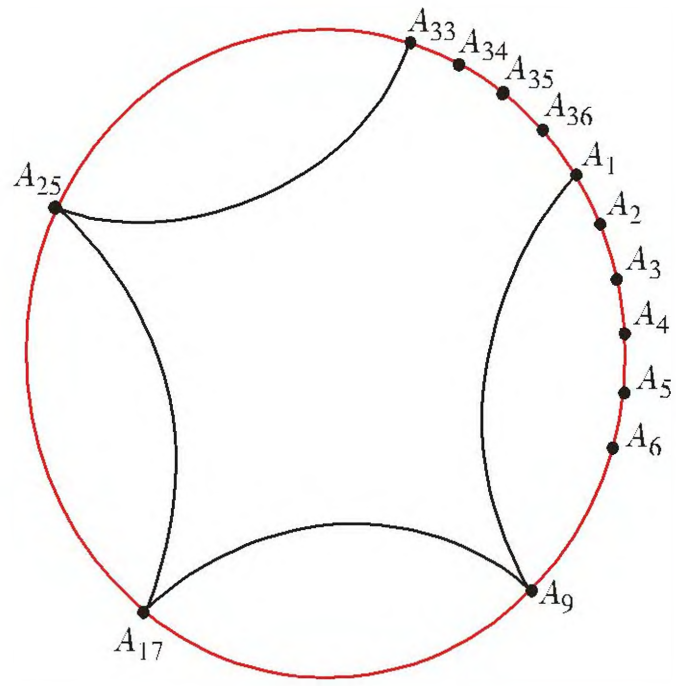
c. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).

Mémento p. 140

PROBLÈME OUVERT

ACTIVITÉ 1 Tourner en rond !

On dispose d'un cercle sur lequel on a placé 36 points équidistants.
On réalise des arcs de cercle en respectant la règle utilisée sur la figure ci-dessous : ainsi, partant de A_1, on joint A_9 ; puis partant de A_9, on joint A_{17}...
On continue ainsi jusqu'à ce qu'on revienne en A_1.



1. Quel est le prochain arc à tracer ?

2. En procédant ainsi, en combien d'étapes aura-t-on dessiné tous les arcs de cercles possibles ?

3. Tous les points seront-ils utilisés ?

4. Répondre aux mêmes questions si on joint A_1 à A_8, puis A_8 à A_{15}...

ACTIVITÉ 2 Des seaux, pas si sots...

A Quelques essais

1. Armand a deux seaux non gradués, l'un d'une contenance de 7 litres et l'autre de 3 litres et un récupérateur d'eau.
En utilisant uniquement ces deux seaux, il souhaite obtenir 1 litre d'eau.
Comment doit-il s'y prendre, en effectuant le moins d'étapes possibles ?
Comment traduire cette expérience par une égalité ?

2. Arnaud a lui aussi deux seaux, de contenances respectives 7 et 4 litres. Comment peut-il s'y prendre pour obtenir 1 litre d'eau en effectuant le moins d'étapes possibles ?
Comment traduire cette expérience par une égalité ?

B Un cas plus compliqué

Arsène dispose quant à lui d'un seau de 15 litres et d'un seau de 13 litres.

1. Trouver une méthode pour obtenir 1 litre.

2. Justifier que, pour résoudre le problème posé, il suffit de déterminer l'ensemble des couples d'entiers $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation (E) : $15x + 13y = 1$.

> Une telle équation est appelée équation **diophantienne**, du nom du mathématicien grec Diophante.

3. En utilisant la table de la calculatrice, faire afficher les valeurs de $y = \frac{1}{13} - \frac{15}{13}x$ pour x entier entre 0 et 30. En déduire un couple d'entiers solution.
En modifiant la démarche, déterminer le nombre minimal de manipulations à effectuer avec les deux seaux pour obtenir 1 litre d'eau.

C Peut-on prendre des seaux de n'importe quelle contenance ?

Est-il possible d'obtenir 1 litre d'eau en utilisant un seau de 15 litres et un seau de 12 litres ? Justifier la réponse.

1 PGCD – Algorithme d'Euclide

Soit a et b deux entiers. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est non vide car il contient au moins deux entiers : 1 et – 1.
On note $\Delta(a\ ;\ b)$, ou $\Delta(b\ ;\ a)$, l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

EXEMPLES • $\Delta(6\ ;\ 14) = \{-2\ ;-1\ ;\ 1\ ;\ 2\}$ • $\Delta(-12\ ;\ 8) = \{-4\ ;-2\ ;-1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 4\}$

Remarques
• Si a, ou b, est non nul $\Delta(a\ ;\ b)$ est un ensemble fini. En effet tout entier non nul a un nombre fini de diviseurs.
• Si b divise a alors $\Delta(a\ ;\ b)$ est égal à l'ensemble des diviseurs de b.

RAPPEL
Si b divise a, alors tout diviseur de b est un diviseur de a.

Propriété Soit a et b deux entiers tels que $b > 0$ et $a = bq + r$ $(0 \leqslant r < b)$ la division euclidienne de a par b. Alors, $\Delta(a\ ;\ b) = \Delta(b\ ;\ r)$.

DÉMONSTRATION
• Si d est un diviseur commun à a et b, alors d divise r car $r = a - bq$: donc d est un diviseur commun à b et r.
• Réciproquement si d est un diviseur commun à b et r, alors d divise a car $a = bq + r$: donc d est un diviseur commun à a et b.
On a bien $\Delta(a\ ;\ b) = \Delta(b\ ;\ r)$.

INFO
Cette définition peut s'étendre au cas où un, et un seul, des deux entiers est nul.

Définition Si a et b sont deux entiers non nuls, alors $\Delta(a;b)$ est un ensemble fini et on appelle **PGCD** de a et b le **plus grand diviseur commun** à a et b.
Le PGCD de a et b est noté $pgcd(a;b)$ ou encore $a \wedge b$.

EXEMPLES • $pgcd(6\ ;\ 14) = 2$ • $pgcd(-12\ ;\ 8) = 4$

INFO
Ces propriétés se déduisent de la définition du PGCD et des propriétés de $\Delta(a\ ;\ b)$.

Propriétés du PGCD Soit a et b deux entiers non nuls.

1. $pgcd(a\ ;\ b) \geqslant 1$
2. $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(b\ ;\ a)$
3. $pgcd(a\ ;\ a) = |a|$
4. $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(-a\ ;\ b) = pgcd(a\ ;-b)$
5. Si b divise a , $pgcd(a\ ;\ b) = |b|$
6. Si $a = b\,q + r$ $(0 \leqslant r < b)$, $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(b\ ;\ r)$

Pour déterminer $pgcd(a\ ;\ b)$, on peut, comme ci-dessus, déterminer $\Delta(a\ ;\ b)$.
Il existe aussi un algorithme permettant de déterminer ce PGCD.

Principe de l'algorithme d'Euclide Si la recherche du PGCD de a et b peut se ramener au cas : $a > b > 0$ et b ne divise pas a, alors on effectue des divisions euclidiennes successives dont le **dernier reste non nul** est le **PGCD** de a et b.

DÉMONSTRATION
Si b divise a ou si a divise b, on connaît $pgcd(a\ ;\ b)$. Sinon les propriétés **2.** et **4.** montrent qu'on peut se ramener au cas $a > b > 0$.
On exécute alors l'algorithme suivant :

Divisions euclidiennes		
• $a = bq + r$	$0 \leqslant r < b$	et $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(b\ ;\ r)$,
• $b = rq_1 + r_1$	$0 \leqslant r_1 < r$	et $pgcd(b\ ;\ r) = pgcd(r\ ;\ r_1)$,
• $r = r_1q_2 + r_2$	$0 \leqslant r_2 < r_1$	et $pgcd(r\ ;\ r_1) = pgcd(r_1\ ;\ r_2)$,
…	…	…
• $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$	$0 \leqslant r_n < r_{n-1}$	et $pgcd(r_{n-2}\ ;\ r_{n-1}) = pgcd(r_{n-1}\ ;\ r_n)$,
• $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0.$	$0 < r_n.$	et $pgcd(r_{n-1}\ ;\ r_n) = r_n$ car r_n divise r_{n-1} et $r_n > 0$.

INFO
r_n est le dernier reste non nul.

Les observations faites sur chaque division euclidienne permettent de conclure :
• La suite des restes des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide est une suite d'entiers positifs strictement décroissante, cette suite aboutit donc nécessairement à 0.
• $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(b\ ;\ r) = pgcd(r\ ;\ r_1) = \ldots = pgcd(r_{n-2}\ ;\ r_{n-1}) = pgcd(r_{n-1}\ ;\ r_n) = r_n$.
Donc r_n, dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide, est le PGCD de a et b.

Propriétés Soit a et b deux entiers non nuls et $d = pgcd(a\ ;\ b)$.

1. Il existe des entiers u et v tels que $d = au + bv$.

2. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de d.

3. Pour tout entier naturel non nul k, $pgcd(ka\ ;\ kb) = kd$.

DÉMONSTRATION

1. On démontre, par récurrence, que tous les restes de l'algorithme d'Euclide sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de a et b.
• $r = a - bq$, donc la propriété à démontrer est vraie pour le premier reste.
• Si $r_{k-2} = au_{k-2} + bv_{k-2}$ et $r_{k-1} = au_{k-1} + bv_{k-1}$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de a et b, alors

$$r_k = r_{k-2} - r_{k-1}q_k = (au_{k-2} + bv_{k-2}) - q_k(au_{k-1} + bv_{k-1})$$
$$= a(u_{k-2} - q_k u_{k-1}) + b(v_{k-2} - q_k v_{k-1}) = au_k + bv_k,$$

avec u_k et v_k entiers parce que q_k, u_{k-1}, u_{k-2}, v_{k-1} et v_{k-2} sont des entiers.
• On a bien montré par récurrence que $d = r_n = au + bv$, avec u et v entiers.

2. Dans l'algorithme d'Euclide, on a $\Delta(a\ ;\ b) = \Delta(b\ ;\ r) = \Delta(r\ ;\ r_1) = \ldots = \Delta(r_{n-1}\ ;\ r_n)$.
r_n étant un diviseur de r_{n-1}, $\Delta(r_{n-1}\ ;\ r_n)$ est égal à l'ensemble des diviseurs de r_n.
Comme $r_n = d$, on a bien montré que $\Delta(a\ ;\ b)$ est l'ensemble des diviseurs de d.

3. La propriété est évidente si a divise b ou si b divise a. Sinon on se ramène au cas $a > b > 0$ pour déterminer $pgcd(k\,a\ ;\ k\,b)$; on a alors $ka > kb > 0$ car $k > 0$.
Or $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$ est équivalent à $(ka) = (kb)q + (kr)$ avec $0 \leqslant (kr) < (kb)$.
L'algorithme d'Euclide permettant de déterminer $pgcd(ka\ ;\ kb)$ est donc celui permettant de déterminer $pgcd(a\ ;\ b)$, où toutes les divisions euclidiennes sont *multipliées* par k.
Le dernier reste non nul est donc, lui aussi, multiplié par k et $pgcd\,(ka\ ;\ kb) = kd$.

Le cours en action

Déterminer un PGCD

ÉNONCÉ **Déterminer le PGCD de a et b dans les cas suivants :**

1. $a = -5$ et $b = 165$.

2. $a = 1\,700$ et $b = 1\,300$.

3. $a = -418$ et $b = 442$.

SOLUTION **1.** (-5) est un diviseur de 165, donc $pgcd(-5\ ;\ 165) = 5$.

2. $\Delta(17\ ;\ 13) = \{-1\ ;\ 1\}$ car 17 et 13 sont premiers.
On en déduit que $pgcd(17\ ;\ 13) = 1$, puis que $pgcd(1\,700\ ;\ 1\,300) = 100$, en appliquant la propriété **3.** ci-dessus.

3. On utilise l'algorithme d'Euclide avec 442 et 418.
$442 = 418 \times 1 + 24$; $418 = 24 \times 17 + 10$
$24 = 10 \times 2 + 4$; $10 = 4 \times 2 + 2$
$4 = 2 \times 2 + 0$.
On conclut que $pgcd(-418\ ;\ 442) = 2$ (dernier reste non nul).

Exercices 1 à 3

Déterminer u et v tels que $d = au + bv$

ÉNONCÉ **Déterminer $d = pgcd(41\ ;\ 12)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide et en déduire des entiers relatifs u et v tels que $d = 41u + 12v$.**

SOLUTION On exécute l'algorithme d'Euclide en écrivant, à chaque étape, le reste de la division comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de $a = \mathbf{41}$ et $b = \mathbf{12}$.

$\mathbf{41} = \mathbf{12} \times 3 + \mathbf{5}$ $5 = \mathbf{41} - \mathbf{12} \times 3 = a - 3b$.
$\mathbf{12} = \mathbf{5} \times 2 + \mathbf{2}$ $2 = \mathbf{12} - \mathbf{5} \times 2 = b - 2 \times (a - 3b)$, donc $2 = 7b - 2a$.
$\mathbf{5} = 2 \times 2 + \mathbf{1}$ donc $1 = \mathbf{5} - 2 \times 2 = (a - 3b) - 2 \times (7b - 2a)$, $1 = 5a - 17b$.
$2 = 1 \times 2 + 0$.
On peut alors conclure :
• $d = 1$, c'est le dernier reste non nul de l'algorithme.
• On peut prendre $u = 5$ et $v = -17$, car $\mathbf{1} = 5a - 17b$.

Exercices 2 et 3

2 Entiers premiers entre eux

INFO
On note $a \wedge b = 1$ pour les entiers premiers entre eux, de préférence à $pgcd(a\,;b) = 1$.

Définition Soit a et b deux entiers non nuls, on dit que a et b sont **premiers entre eux** si leur PGCD est égal à 1, autrement dit si $a \wedge b = 1$.

EXEMPLES • $5 \wedge (-14) = 1$ • $20 \wedge 63 = 1$ • $1 \wedge (-1) = 1$ • $2 \wedge 13 = 1$

• Soit p un nombre premier et k un entier tel que $0 < k < p$, alors $p \wedge k = 1$. En effet, p étant premier, il a pour seuls diviseurs positifs 1 et p et p ne peut pas être un diviseur de k car $0 < k < p$. 1 est donc le seul diviseur positif commun à p et k, et $p \wedge k = 1$.

Remarque
• Il ne faut pas confondre *nombres premiers* et *entiers premiers entre eux* : il est vrai que deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux (par exemple 2 et 13), mais deux entiers peuvent être premiers entre eux sans que ni l'un, ni l'autre ne soit premier (par exemple 20 et 63).

Théorème Soit a, b et d des entiers naturels non nuls.
Le PGCD de a et b est égal à d si, et seulement si, il existe des entiers non nuls a' et b' tels que $a = da'$, $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$.

DÉMONSTRATION
• Si $d = pgcd(a\,;b)$, alors, d étant un diviseur commun à a et b, il existe des entiers non nuls a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Montrons que $a' \wedge b' = 1$.
Soit $q = pgcd(a'\,;b')$. Alors, d'après la propriété 3, $pgcd(da'\,;db') = dq$.
Mais $pgcd(da'\,;db') = pgcd(a\,;b) = d$. On en déduit que $dq = d$, avec $d \neq 0$, donc que $q = 1$ et que $a' \wedge b' = 1$.
• Réciproquement, s'il existe a' et b', non nuls, tels que $a = d\,a'$, $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$, alors $pgcd(da'\,;db') = d$, autrement dit $pgcd(a\,;b) = d$.

INFO
Ceci est une autre façon de déterminer un PGCD.

EXEMPLE Soit $a = 35$ et $b = 42$; $a = 7 \times 5$, $b = 7 \times 6$ et $5 \wedge 6 = 1$, donc $pgcd(a\,;b) = 7$.

Théorème de Bézout Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

DÉMONSTRATION
• Si a et b sont premiers entre eux, $pgcd(a\,;b) = 1$ et, d'après la propriété 1 du PGCD, il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
• Réciproquement, s'il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$, alors tout diviseur commun à a et b divise aussi $au + bv$, donc il divise 1.
Donc 1 et – 1, seuls diviseurs de 1, sont les seuls diviseurs communs à a et b et $a \wedge b = 1$.

Théorème Soit a, b_1 et b_2 des entiers non nuls.
Si $a \wedge b_1 = 1$ et $a \wedge b_2 = 1$, alors $a \wedge (b_1 b_2) = 1$.

INFO
On utilise le théorème de Bézout dans les deux sens.

DÉMONSTRATION
Si $a \wedge b_1 = 1$, il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + b_1 v = 1$.
De même, si $a \wedge b_2 = 1$, il existe des entiers relatifs u' et v' tels que $au' + b_2 v' = 1$.
On a donc $(au + b_1 v)(au' + b_2 v') = 1$, soit $a(uau' + b_1 vu' + u\,b_2 v') + b_1 b_2 (vv') = 1$.
Les coefficients de a et $(b_1 b_2)$ étant entiers, cette égalité prouve que $a \wedge (b_1 b_2) = 1$.

Théorème de Gauss Soit a, b et c des entiers, a et b non nuls.
Si a divise le produit bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

DÉMONSTRATION Si $a \wedge b = 1$, alors il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
En multipliant cette égalité par c on obtient l'égalité $acu + bcv = c$.
a divise évidemment le produit acu et a divise aussi le produit bcv, car a divise bc.
On en conclut que a divise $acu + bcv$, donc que a divise c.

Théorème **1.** Un entier n divisible par a et b tels que $a \wedge b = 1$, est divisible par ab.

2. Si p est premier, p divise $\binom{p}{k}$ pour $0 < k < p$.

INFO
On démontre ici un résultat bien connu :
tout entier divisible par 2 et 3 est divisible par 6.
Ce résultat se généralise :
si un entier est divisible par 2, 3 et 5 alors il est divisible par $30 = 2 \times 3 \times 5$, car 2, 3 et 5 sont premiers entre eux deux à deux !

DÉMONSTRATION **1.** Si n est divisible par a alors il existe un entier k tel que $n = ak$.
Si b divise n alors b divise le produit ak, et, comme $a \wedge b = 1$, on peut appliquer le théorème de Gauss et en déduire que b divise k.
Il existe donc un entier k' tel que $k = bk'$ et on a alors $n = ak = abk'$, ce qui prouve que n est divisible par le produit ab.

2. $\dfrac{p!}{(p-k)!}$ est un multiple de p quand $k > 0$. Or $\dfrac{p!}{(p-k)!} = k! \times \binom{p}{k}$ car $\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$.

On en déduit que p divise le produit $k! \times \binom{p}{k}$. De plus, $p \wedge k! = 1$, pour $0 < k < p$.

On peut alors appliquer le théorème de Gauss et conclure que p divise $\binom{p}{k}$ pour $0 < k < p$.

Le cours en action

Utiliser le théorème de Bézout

ÉNONCÉ **Soit n un entier relatif. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.**

1. $a = n + 1$ et $b = n$ ($n \neq -1$ et $n \neq 0$).
2. $a = -n + 4$ et $b = 3n - 11$ ($n \neq 4$).
3. $a = 6n + 3$ et $b = 3n + 1$.

SOLUTION **1.** Si $n \neq -1$ et $n \neq 0$, a et b sont non nuls et $a - b = (n + 1) - n = 1$, il existe donc des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
On peut alors appliquer le théorème de Bézout, et conclure que a et b sont premiers entre eux.
Deux entiers non nuls consécutifs sont premiers entre eux.

2. Si $n \neq 4$, a et b sont non nuls et $3a + b = 3(-n + 4) + 3n - 11 = 1$, il existe donc des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
On en conclut, théorème de Bézout, que a et b sont premiers entre eux.

3. Pour tout n, a et b sont non nuls et $a - 2b = 6n + 3 - 2(3n + 1) = 1$, il existe donc des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
On en conclut, théorème de Bézout, que a et b sont premiers entre eux.

Exercice 6

Équations $ax + by = c$

ÉNONCÉ **Soit a et b deux entiers non nuls et $d = pgcd(a ; b)$. Montrer que l'équation $ax + by = c$, où x et y sont des entiers relatifs, a des solutions si, et seulement si, c est un multiple de d.**

SOLUTION • d divise a et b, donc d divise $ax + by$. Si c n'est pas un multiple de d alors l'équation n'a pas de solution.
• Si c est un multiple de d, il existe un entier k tel que $c = k\,d$.
On sait qu'il existe des entiers u et v tels que $au + bv = d$.
On en déduit que $a(ku) + b(kv) = kd = c$, donc que l'équation a au moins une solution : $x = ku$ et $y = kv$.
On a bien montré que l'équation $ax + by = c$ a des solutions si, et seulement si, c est un multiple de d.

Exercices 18 et 19

Équations $ax = by$

ÉNONCÉ **Résoudre l'équation $13x = 15y$, où x et y sont des entiers relatifs.**

SOLUTION On utilise le théorème de Gauss :
$13 \wedge 15 = 1$ et 13 divise le produit $15y$, donc 13 divise y et il existe un entier k tel que $y = 13k$.
En remplaçant y par $13k$ dans l'équation $13x = 15y$, on trouve que $13x = 15 \times 13k$, ce qui entraîne $x = 15k$.
On peut en conclure que les solutions de l'équation $13x = 15y$ sont les couples (x ; y), avec $x = 15k$ et $y = 13k$, où k est un entier relatif quelconque.

Exercices 17, 20 et 21

3 PPCM – Théorème de Fermat

Définition Soit a et b deux entiers **naturels** non nuls, on appelle **PPCM** de a et b le **plus petit multiple commun strictement positif** de a et b.
Le PPCM de a et b est noté $ppcm(a\,;b)$.

EXEMPLES • $ppcm(15\,;10)=30$ • $ppcm(1\,;5)=5$ • $ppcm(2\,;13)=26$

Remarque Si b divise a, alors $ppcm(a\,;b)=a$, en particulier $ppcm(a\,;a)=a$.

Propriétés Soit a et b deux entiers **naturels** non nuls, $d=pgcd(a\,;b)$ et $m=ppcm(a\,;b)$.

1. L'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de m.
2. $md=ab$.
3. $m=ab$ si, et seulement si, $a\wedge b=1$.
4. Pour tout entier **naturel** non nul k, $ppcm(ka\,;kb)=km$.

DÉMONSTRATION

1. • Tout multiple de m est évidemment un multiple commun à a et b.
• Réciproquement, soit n un multiple commun à a et b. On va montrer que n est un multiple de m en utilisant la division euclidienne de n par m : $n=mq+r$, avec $0\leqslant r<m$.
Les entiers a et b étant des diviseurs de n et m, ils sont aussi des diviseurs de $r=n-mq$.
Le reste r est donc un multiple commun à a et b.
Or $0\leqslant r<m$ et m est le plus petit multiple commun strictement positif de a et b.
Ceci n'est possible que si $r=0$, ce qui entraîne $n=mq$.
n est donc bien un multiple de m.

2. Il existe des entiers **naturels** non nuls a' et b' tels que $a=da'$, $b=db'$ et $a'\wedge b'=1$.
Soit $m=ppcm(a\,;b)$: il existe des entiers **naturels** non nuls α et β tels que $m=a\alpha=b\beta$.
On a donc $m=da'\alpha=db'\beta$ et on en déduit que $a'\alpha=b'\beta$, car $d\neq 0$.
On applique alors le théorème de Gauss : b' divise le produit $a'\alpha$ et $a'\wedge b'=1$, donc b' divise α et il existe un entier **naturel** non nul q tel que $\alpha=b'q$.
On a alors $m=da'\alpha=da'b'q$, ce qui entraîne $m\geqslant da'b'$, car $q\geqslant 1$.
Or $da'b'=ab'=ba'$ est un multiple commun strictement positif de a et b, ce qui entraîne $da'b'\geqslant m$, par définition du PPCM.
On a donc $m\geqslant da'b'$ et $da'b'\geqslant m$. On en déduit que $m=da'b'$.
On a alors $md=da'db'=ab$.

3. On a alors $m=ab$ si, et seulement si, $d=1$, soit $a\wedge b=1$.

4. De $md=ab$ on déduit $(km)(kd)=(ka)(kb)$. Or on sait que $kd=pgcd(ka\,;kb)$.
On applique alors la propriété **2.** pour en déduire que $km=ppcm(ka\,;kb)$.

INFO On procède par double inclusion.

INFO On a $m=da'b'$.

EXEMPLE Soit $a=442$ et $b=418$. On a vu que $d=2$, on déduit de $md=ab$ que $m=92\,378$.

INFO Cette méthode est souvent la plus simple pour trouver un PPCM.

Propriété **Décompositions en produit de nombres premiers**

Si on connaît les décompositions en produit de nombres premiers des entiers naturels non nuls a et b, alors on peut déterminer les décompositions en produit de nombres premiers de $d=pgcd(a\,;b)$ et $m=ppcm(a\,;b)$. En effet :
• d est égal au produit de **tous les facteurs premiers communs** aux deux décompositions, élevés chacun **à la plus petite des deux puissances** les concernant.
$d=1$ si, et seulement si, il n'y a aucun facteur premier commun aux deux décompositions.
• m est égal au produit de **tous les facteurs premiers présents** dans les deux décompositions, élevés chacun **à la plus grande puissance** les concernant.

EXEMPLES Soit $a=4\,704=2^5\times 3\times 7^2$ et $b=700=2^2\times 5^2\times 7$.
On a alors $d=pgcd(a\,;b)=2^2\times 7=28$ et $m=ppcm(a\,;b)=2^5\times 3\times 5^2\times 7^2=117\,600$.

INFO
P. Fermat, mathématicien français du 17e siècle, à qui l'on doit aussi un Grand théorème.

Petit théorème de Fermat Soit p un nombre premier et n un entier naturel.

1. $n^p \equiv n\ (p)$.

2. Si $n \wedge p = 1$, alors $n^{p-1} \equiv 1\ (p)$.

DÉMONSTRATION

1. On montre, par récurrence, que pour $n \geqslant 0$, $n^p \equiv n\ (p)$.

- $0^p = 0$, donc $0^p \equiv 0\ (p)$, la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Supposons que $n^p \equiv n\ (p)$. On applique alors la formule du binôme de Newton à $(n+1)^p$

$$(n+1)^p = n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \ldots + \binom{p}{p-1} n + 1.$$

Or p divise $\binom{p}{k}$ pour $0 < k < p$. On en déduit que p divise $\binom{p}{1} n^{p-1} + \ldots + \binom{p}{p-1} n$.

Autrement dit, $\binom{p}{1} n^{p-1} + \ldots + \binom{p}{p-1} n \equiv 0\ (p)$.

On a donc $(n+1)^p \equiv n^p + 1\ (p)$.

Or, par hypothèse, $n^p \equiv n\ (p)$. On peut donc conclure que $(n+1)^p \equiv n + 1 (p)$.

- On a bien montré par récurrence que pour $n \geqslant 0$, $n^p \equiv n\ (p)$.

2. Si $n^p \equiv n(p)$, alors p divise $n^p - n$. Or $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$.
On peut alors appliquer le théorème de Gauss : p divise le produit $n(n^{p-1} - 1)$ et $n \wedge p = 1$, donc p divise $(n^{p-1} - 1)$, autrement dit $n^{p-1} \equiv 1\ (p)$.

Le cours en action

Déterminer un PPCM

ÉNONCÉ Déterminer le PPCM de a et b.

1. $a = 5$ et $b = 165$.
2. $a = 19$ et $b = 17$.
3. $a = 2\,000$ et $b = 1\,200$.
4. $a = 140$ et $b = 126$.
5. $a = 7\,931$ et $b = 5\,665$.

SOLUTION 1. 5 divise 165, donc $ppcm(5\,;\,165) = 165$.

2. 19 et 17 sont premiers, donc $19 \wedge 17 = 1$.
On en déduit que $ppcm(19\,;\,17) = 19 \times 17 = 323$.

3. On commence par chercher $ppcm(20\,;\,12)$.
$20 = 4 \times 5$ et $12 = 4 \times 3$, avec $5 \wedge 3 = 1$. Donc, en utilisant la formule $m = da'b'$, on a $ppcm(20\,;\,12) = 4 \times 5 \times 3 = 60$.
On en déduit que $ppcm(2\,000\,;\,1\,200) = 6\,000$.

4. On trouve rapidement les décompositions en produits de nombres premiers : $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.
On en déduit que $ppcm(140\,;\,126) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1\,260$.

5. On trouve d'abord $pgcd(a\,;\,b)$ par l'algorithme d'Euclide :
$7\,931 = 5\,665 \times 1 + 2\,266$
$5\,665 = 2\,266 \times 2 + 1\,133$
$2\,266 = 1\,133 \times 2 + 0$.
On en déduit que $pgcd(a\,;\,b) = 1\,133$ (dernier reste non nul).
Puis, en utilisant la formule $md = ab$,
on a $ppcm(7\,931\,;\,5\,665) = 39\,655$.

Exercices 24 à 26

Utiliser le théorème de Fermat

ÉNONCÉ 1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $n^5 - n$ est divisible par 30.

2. Montrer que $2^{338} + 3^{338}$ est divisible par 13.

SOLUTION 1. 5 est un nombre premier et n un entier naturel, donc on peut appliquer le théorème de Fermat : $n^5 \equiv n(5)$.
Autrement dit, $n^5 - n$ est divisible par 5.
$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n^3 - n)(n^2 + 1)$.
3 est un nombre premier , donc $n^3 \equiv n(3)$.
Autrement dit, $n^3 - n$, puis $n^5 - n$, sont divisibles par 3.
Par ailleurs, $n^5 \equiv n(2)$: en effet, si n est pair alors n^5 est pair et si n est impair alors n^5 est impair.
Autrement dit, $n^5 - n$ est divisible par 2.
$n^5 - n$ est donc divisible par 2, par 3 et par 5. Comme 2, 3 et 5 sont premiers entre eux deux à deux, alors $n^5 - n$ est divisible par $30 = 2 \times 3 \times 5$.

2. $338 = 13 \times 26$, donc $2^{338} = (2^{26})^{13}$.
13 est un nombre premier, donc on peut appliquer le théorème de Fermat : $(2^{26})^{13} \equiv 2^{26}(13)$, soit $2^{338} \equiv 2^{26}(13)$.
De même $26 = 13 \times 2$, donc $2^{26} = (2^2)^{13}$, et en appliquant à nouveau le théorème de Fermat on a $2^{26} \equiv 2^2(13)$.
On a donc montré que $2^{338} \equiv 2^2(13)$, soit $2^{338} \equiv 4(13)$.
De même, on montre que $3^{338} \equiv 3^2(13)$, soit $3^{338} \equiv 9(13)$.
Finalement, $2^{338} + 3^{338} \equiv 13(13)$ et $13 \equiv 0(13)$.
On peut donc en conclure que $2^{338} + 3^{338}$ est divisible par 13.

Exercices 29 à 31

1 PGCD et PPCM

OBJECTIF Résoudre, dans $\mathbb{N}$, des systèmes où le PGCD et le PPCM interviennent.

ÉNONCÉ

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, $d = pgcd(a ; b)$ et $m = ppcm(a ; b)$.
Déterminer tous les couples $(a ; b)$, avec $a \geqslant b$, tels que :

1. $ab = 882$ et $d = 7$.
2. $a + b = 26$ et $a - b = d$.
3. $a + b = 21$ et $m = 30$.
4. $m + 11d = 20$.

UNE MÉTHODE Poser $a = da'$, $b = db'$, avec $a' \wedge b' = 1$.

SOLUTION

Il existe des entiers naturels non nuls a' et b' tels que $a = da'$, $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$.
On a aussi $a' \geqslant b'$, car $a \geqslant b$, et $m = da'b'$.

1. $ab = 882$, donc $d^2a'b' = 882$, soit $a'b' = 18$ car $d = 7$.
Or $18 \times 1 = 9 \times 2 = 6 \times 3$ sont les seuls produits de deux entiers naturels qui soient égaux à 18.
La condition $a' \wedge b' = 1$ permet d'exclure le cas $a' = 6$, $b' = 3$.
Il ne reste que deux possibilités : $a' = 18$, $b' = 1$ et $a' = 9$, $b' = 2$ (car $a' \geqslant b'$).
Il n'y a donc que deux couples $(a ; b)$ possibles, avec $a = 7 \times 18 = 126$ et $b = 7$ d'une part, $a = 7 \times 9 = 63$ et $b = 7 \times 2 = 14$ d'autre part.
Ces deux couples vérifient bien les conditions $ab = 882$ et $d = 7$, on peut donc conclure qu'il y a deux solutions : $(126 ; 7)$ et $(63 ; 14)$.

2. Si $a - b = d$, alors $d(a' - b') = d$, donc $a' - b' = 1$ (car $d \neq 0$) et $a' = b' + 1$.
Si $a + b = 26$, alors $d(a' + b') = d(2b' + 1) = 26$.
Or $26 \times 1 = 13 \times 2$ sont les seuls produits de deux entiers naturels qui soient égaux à 26.
$2b' + 1$ est impair et supérieur ou égal à 3, car b est non nul.
La condition $d(a' + b') = 26$ implique donc $2b' + 1 = 13$ et $d = 2$.
On en déduit que $b' = 6$, puis que $a' = b' + 1 = 7$. On a bien $a' \wedge b' = 1$.
Il n'y a donc qu'un seul couple $(a ; b)$ possible, avec $a = 2 \times 7 = 14$ et $b = 2 \times 6 = 12$.
Ce couple vérifie bien les conditions $a + b = 26$ et $a - b = d$, on peut donc conclure qu'il n'y a qu'une solution : $(14 ; 12)$.

3. $a + b = 21$ et $m = 30$, donc $d(a' + b') = 21$ et $da'b' = 30$.
d est alors un diviseur commun positif de 21 et 30 : on en déduit que $d = 1$ ou $d = 3$.
Si $d = 1$, alors $a'b' = 30$ et $a' + b' = 21$. Or $30 \times 1 = 15 \times 2 = 10 \times 3 = 6 \times 5$ sont les seuls produits de deux entiers naturels qui soit égaux à 30.
Tous ces produits vérifient la condition $a' \wedge b' = 1$, mais aucun ne vérifie la condition $a' + b' = 21$.
On en déduit que $d \neq 1$ donc que $d = 3$, puis que $a'b' = 10$ et $a' + b' = 7$.
Or $10 \times 1 = 5 \times 2$ sont les seuls produits de deux entiers naturels qui soient égaux à 10.
La condition $a' + b' = 7$ permet d'exclure le cas $a' = 10$, $b' = 1$.
Il ne reste qu'une possibilité : $a' = 5$ et $b' = 2$, qui vérifie bien $a' \wedge b' = 1$.
Il n'y a donc qu'un seul couple $(a ; b)$ possible, avec $a = 3 \times 5 = 15$ et $b = 3 \times 2 = 6$.
Ce couple vérifie bien les conditions $a + b = 21$ et $m = 30$, on peut donc conclure qu'il n'y a qu'une solution : $(15 ; 6)$.

4. Si $d \geqslant 2$, alors $m + 11d \geqslant 22$ car $m \geqslant 1$. C'est impossible car $m + 11d = 20$.
On en déduit que $d = 1$, donc que $a \wedge b = 1$ ($a = a'$ et $b = b'$).
On a donc $m = ab = 9$.
Or $9 \times 1 = 3 \times 3$ sont les seuls produits de deux entiers naturels qui soient égaux à 9.
La condition $a \wedge b = 1$ permet d'exclure le couple $(a ; b)$ tel que $a = b = 3$.
Il n'y a donc qu'un seul couple $(a ; b)$ possible, avec $a = 9$ et $b = 1$.
Ce couple vérifie bien la condition $m + 11d = 20$, on peut donc conclure qu'il n'y a qu'une solution : $(9 ; 1)$.

Le cours, partie 1

2 Équations $ax + by = c$

OBJECTIF
Savoir résoudre les équations $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}$.

ÉNONCÉ

1. On considère l'équation (E) : $80x + 53y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
a. Donner une solution particulière de (E).
b. Résoudre (E).
2. Résoudre l'équation $80x + 53y = 4\,300$ où x et y sont des entiers relatifs.
3. Un groupe d'hommes et de femmes a dépensé 4 300 € lors d'un banquet.
Chaque homme a dépensé 80 € et chaque femme a dépensé 53 €.
Combien y avait-il d'hommes et de femmes dans ce groupe ?

UNE MÉTHODE
Se ramener à une équation $ax' = by'$, avec $a \wedge b = 1$, et utiliser le théorème de Gauss.

SOLUTION

1. a. 53 est premier et ne divise pas 80, donc $80 \wedge 53 = 1$. On utilise l'algorithme d'Euclide avec $a = 80$ et $b = 53$ pour trouver une solution particulière de (E) :

- $80 = 53 + 27$ — $27 = 80 - 53 = a - b$
- $53 = 27 + 26$ — $26 = 53 - 27 = b - (a - b) = 2b - a$
- $27 = 26 + 1$ — $1 = 27 - 26 = (a - b) - (2b - a) = 2a - 3b$

On pouvait aussi trouver une solution particulière en utilisant la table de la calculatrice à partir de : $y = \frac{1}{53} - \frac{80}{53}x$.

$80 \times 2 + 53 \times (-3) = 1$, donc le couple $(2\,;-3)$ est une solution particulière de (E).

b. On soustrait l'équation (E) et l'égalité $80 \times 2 + 53 \times (-3) = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} 80x + 53y = 1 \\ 80 \times 2 + 53 \times (-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 80(x-2) + 53(y+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 80(x-2) = -53(y+3), \text{ que l'on note } (E').$$

On peut alors appliquer le théorème de Gauss :
$80 \wedge (-53) = 1$ et 80 divise le produit $-53\,(y + 3)$, donc 80 divise $(y + 3)$.
On en déduit qu'il existe un entier relatif k tel que $y + 3 = 80k$, soit $y = -3 + 80k$.
En remplaçant $(y + 3)$ par $80\,k$ dans (E'), on trouve $80\,(x - 2) = -53 \times 80k$.
On en déduit que $x - 2 = -53k$, soit $x = 2 - 53k$.
On en conclut que les solutions de (E) sont les couples $(x\,;y)$ avec $x = 2 - 53k$ et $y = -3 + 80k$, où k est un entier relatif quelconque.

2. On a $2 \times 4\,300 = 8\,600$ et $3 \times 4\,300 = 12\,900$, donc $80 \times 8\,600 + 53 \times (-12\,900) = 4\,300$, ce qui donne une solution particulière de l'équation.
On procède alors comme à la question **1.b** :

$$\begin{cases} 80x + 53y = 4\,300 \\ 80 \times 8\,600 + 53 \times (-12\,900) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 80(x - 8\,600) = -53(y + 12\,900).$$

On applique le théorème de Gauss et on en déduit qu'il existe un entier relatif k tel que $x - 8\,600 = -53k$ et $y + 12\,900 = 80k$. Soit $x = 8\,600 - 53k$ et $y = -12\,900 + 80k$.
On en conclut que les solutions de $80\,x + 53\,y = 4\,300$ sont les couples $(x\,;y)$ avec $x = 8\,600 - 53k$ et $y = -12\,900 + 80k$, où k est un entier relatif quelconque.

ATTENTION
Les solutions de cette équation ne sont donc pas toujours égales à une solution de (E) multipliée par 4 300.

3. Soit x le nombre d'hommes et y le nombre de femmes dans ce groupe.
L'énoncé montre que le couple $(x\,;y)$ est solution de l'équation $80x + 53y = 4\,300$.
On cherche donc les solutions de cette équation qui vérifient les conditions $x > 0$ et $y > 0$.

$$x > 0 \Leftrightarrow 8\,600 - 53\,k > 0 \Leftrightarrow k < \frac{8\,600}{53}.$$

Or $\frac{8\,600}{53} \approx 162{,}3$ et k est un entier. On en déduit que $x > 0 \Leftrightarrow k \leq 162$.

$$y > 0 \Leftrightarrow -12\,900 + 80\,k > 0 \Leftrightarrow k > \frac{12\,900}{80}.$$

Or $\frac{12\,900}{80} \approx 161{,}2$ et k est un entier. On en déduit que $y > 0 \Leftrightarrow k \geq 162$.

Il n'y a donc qu'une solution de l'équation $80x + 53y = 4\,300$ qui vérifie les conditions $x > 0$ et $y > 0$, et elle est obtenue pour $k = 162$.
On trouve alors $x = 14$ et $y = 60$ et on peut conclure qu'il y avait 14 hommes et 60 femmes dans ce groupe.

Le cours, partie 2

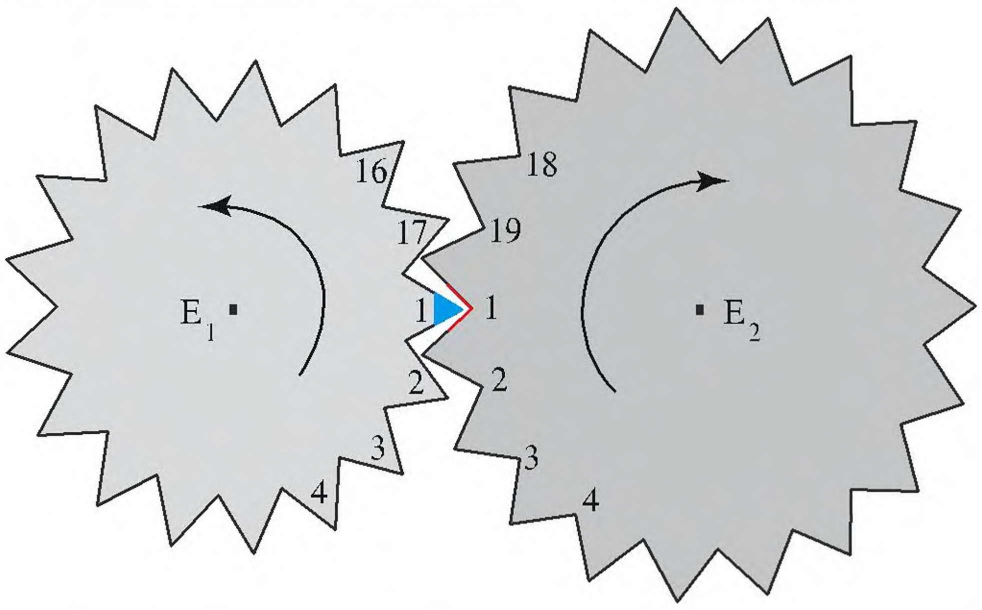
TD 1 Les coïncidences prévisibles

TICE

OBJECTIF Utiliser l'arithmétique pour étudier des phénomènes cycliques.

A Deux engrenages

On considère deux engrenages E_1 et E_2 ayant respectivement 17 et 19 dents.
L'engrenage E_1 tourne dans le sens trigonométrique, tandis que E_2 tourne dans le sens contraire. Sur l'engrenage E_1, l'une des dents est coloriée en bleu, tandis que, sur E_2, l'un des creux est colorié en rouge. On numérote alors les dents de E_1 et les creux de E_2 dans le sens de rotation.
À l'instant initial, la dent bleue est en contact avec le creux rouge.



1. Déterminer le nombre minimum de tours que doit effectuer l'engrenage E_1 depuis l'instant initial pour que la dent bleue se retrouve à nouveau en contact avec le creux rouge.

2. On note x le nombre de tours réalisés par E_1 et y le nombre de tours réalisés par E_2 depuis l'instant initial.
On souhaite déterminer le nombre de tours que doit réaliser E_1 pour que la dent 1 de E_1 soit en contact avec le creux 2 de E_2.

a. Conjecturer la réponse en utilisant un tableur.

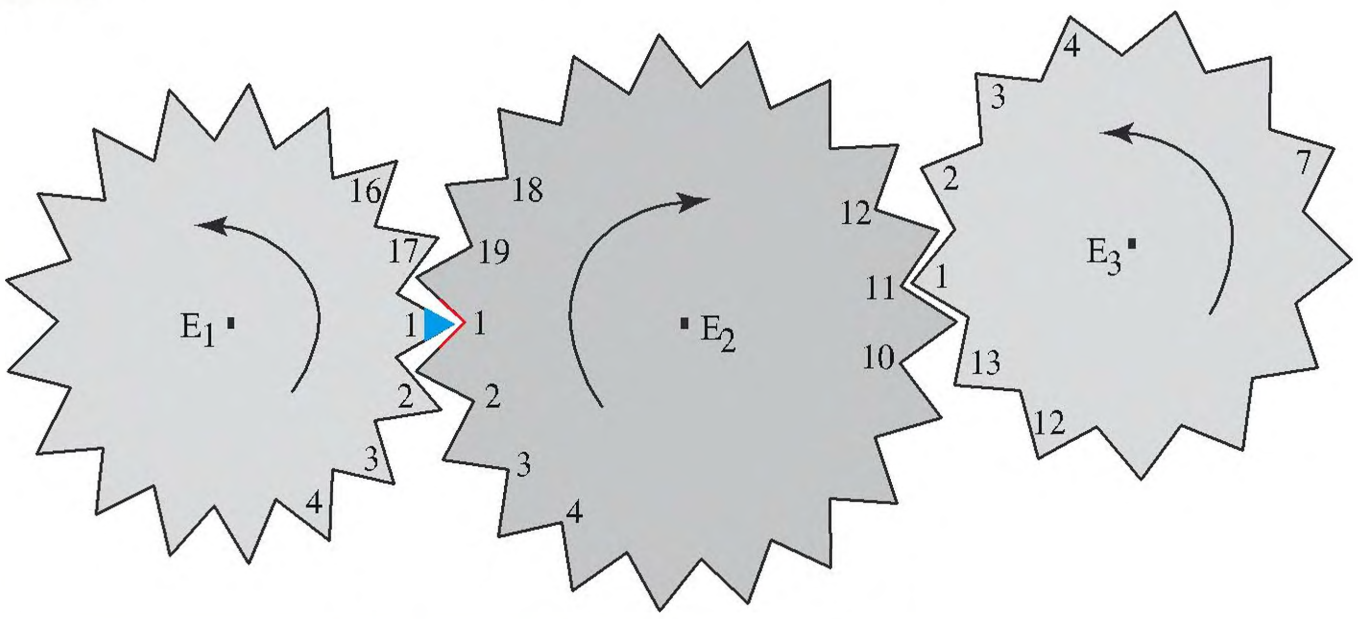
b. Justifier que cela revient à déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x ; y)$ tels que $17x - 19y = 1$.

c. Résoudre cette équation.

d. Conclure.

B Trois engrenages

On ajoute maintenant un nouvel engrenage E_3, qui compte 13 dents.
À l'instant initial, la dent 1 de l'engrenage E_3 se trouve en contact avec le creux 11 de l'engrenage E_2.



1. Déterminer le nombre de tours que doit avoir fait E_2 depuis l'instant initial pour que la dent 7 de E_3 soit en contact avec le creux 12 de E_2.

2. En utilisant le **A** et la question **1.**, déterminer le nombre de tours que doivent avoir faits E_1, E_2 et E_3 depuis l'instant initial pour que la dent 1 de E_1 soit en contact avec le creux 2 de E_2 et que la dent 7 de E_3 soit en contact avec le creux 12 de E_2.

3. Vérifier le résultat obtenu à l'aide d'un tableur.

TD 2 Algorithme d'Euclide

TICE

OBJECTIF Utiliser, avec un tableur, un algorithme pour trouver les coefficients de Bézout, u et v.

A Déterminer u et v tels que $au + bv = d$

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et $d = pgcd(a\,;\,b)$.
Des entiers u et v tels que $a\,u + b\,v = d$ sont appelés **coefficients de Bézout.**
On sait que, pour trouver u et v, on écrit le reste de chaque division euclidienne de l'algorithme d'Euclide comme une combinaison linéaire à coefficients entiers de a et b.

1. On suppose que l'algorithme d'Euclide s'écrit comme suit :

Divisions euclidiennes	*Écritures des restes*
• $a = b\,q_0 + r_0$	$r_0 = a - b\,q_0$, que l'on note $r_0 = a\,u_0 + b\,v_0$.
• $b = r_0\,q_1 + r_1$	$r_1 = b - r_0\,q_1$, que l'on peut écrire $r_1 = a\,u_1 + b\,v_1$.
• $r_0 = r_1\,q_2 + r_2$	$r_2 = r_0 - r_1\,q_2$, que l'on peut écrire $r_2 = a\,u_2 + b\,v_2$.
....	....
• $r_{k-2} = r_{k-1}\,q_k + r_k$	$r_k = r_{k-2} - r_{k-1}\,q_k$, que l'on peut écrire $r_k = a\,u_k + b\,v_k$.
....	....
• $r_{n-2} = r_{n-1}\,q_n + d$	$d = r_{n-2} - r_{n-1}\,q_n$, que l'on peut écrire $d = a\,u_n + b\,v_n$.

a. On a évidemment $u_0 = 1$ et $v_0 = -q_0$. Déterminer u_1 et v_1 en fonction de u_0, v_0 et q_1.
b. Établir une relation de récurrence permettant d'exprimer, pour tout entier $k \geqslant 2$, u_k en fonction de u_{k-1}, u_{k-2} et q_k.
Exprimer de même v_k en fonction de v_{k-1}, v_{k-2} et q_k.

2. Avec le tableur, reprendre la feuille de calcul de la page TICE et la compléter pour obtenir les coefficients u_k et v_k comme ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G
1	*a*	*b*	*q*	*r*	*k*	*u*	*v*
2	**2145**	**123**	17	54	0	1	– 17
3	123	54	2	15	1	– 2	35
4	54	15	3	9	2	7	– 122
5	15	9	1	6	3	– 9	157
6	9	6	1	3	4	16	– 279
7	6	3	2	0			

À chaque ligne, on peut vérifier que l'on a bien : $r = 2145\,u + 123\,v$.

3. Utiliser ce qui précède pour :
a. Déterminer le PGCD, noté d, de 3 546 et 423.
b. Déterminer des coefficients de Bézout u et v tels que $3\,546u + 423v = d$.

B Une application au codage

Maxime souhaite coder un message. Il numérote les lettres de l'alphabet de 0 à 25 , puis les code par la lettre correspondant au reste dans la division de $19x$ par 26, où x est le numéro de la lettre codée.

Ainsi, la lettre C porte le numéro 2. Le reste de la division de 19×2 par 26 est 12. La lettre portant le numéro 12 étant le M, la lettre C sera codée par un M.

1. a. Vérifier, à l'aide d'un tableur, que cette méthode permet bien de coder, c'est-à-dire que deux lettres distinctes sont codées par deux lettres distinctes.
b. Démontrer que, si a et b sont deux nombres entiers distincts tels que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $0 \leqslant b \leqslant 25$, alors $19a$ n'est pas congru à $19b$ modulo 26.
En déduire que la méthode de codage est valide.

2. On dispose d'un message codé, que l'on souhaite décoder sans utiliser la formule de codage.
a. Justifier que, si r est le reste dans la division de $19x$ par 26, alors il existe y entier tel que $19x - 26y = r$.
b. Quel est le PGCD de 19 et 26 ?

En utilisant **A**, déterminer u et v tels que $19u + 26v = 1$.

c. Déduire de ce qui précède un couple $(x_0\,;\,y_0)$ solution de $(E) : 19\,x - 26\,y = r$.
En déduire l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ solutions de (E).

d. Soit r le nombre correspondant au codage de la lettre numéro x.
Proposer une méthode simple permettant de trouver x lorsque l'on connaît r et réaliser la table de décodage au tableur.

e. Décoder alors le mot : RYLUAX.

TD 3 Codage par exponentiation

TICE

OBJECTIF Étudier une méthode de codage voisine du système RSA.

Afin de coder un message, on peut utiliser la méthode suivante :

• On commence par numéroter les lettres de l'alphabet de 0 à 25 (dans l'ordre alphabétique).

• On se donne un nombre premier p strictement supérieur à 25, une clé de codage e et une clé de décodage d.

La clé de codage est un entier naturel premier avec $p - 1$, et la clé de décodage est un entier naturel d tel que $p - 1$ divise $ed - 1$.

Pour coder, on procède comme suit :
soit n l'entier naturel correspondant à la lettre choisie.
Il existe un unique entier N tel que $0 \leqslant N < p$ et $N \equiv n^e\ (p)$.
On code alors la lettre choisie par le nombre N.
Pour décoder, on calcule le reste de la division de N^d par p.

Comme dans le système RSA, on ne code pas un mot par un autre mot, mais par des nombres.

A Expérimentation

1. On choisit, dans cet exemple, $p = 31$ et $e = 7$. Justifier que ce choix convient.

2. En utilisant un tableur, réaliser une « table de codage » inspirée de la feuille ci-dessous, permettant de coder toutes les lettres de l'alphabet.

• =CAR(65) donne « A »
=CAR(65+n) donne la lettre de l'alphabet située en n+1ème place.
• Il est plus efficace de compléter d'abord la colonne B.

	A	B	C
1	**lettre**	**nombre**	**codage**
2	A	0	0
3	B	1	1
4	C	2	4

En déduire le codage du message suivant :
« Pour coder efficacement, il faut trouver de grands nombres premiers. »

3. En appliquant l'algorithme d'Euclide au couple (30 ; 7), déterminer une valeur possible de d.

4. Décoder, en utilisant cette clé, le mot de quatre lettres 25 19 13 00.
Vérifier à l'aide du tableau précédent.

5. Dans la colonne E, saisir la liste des nombres entiers compris entre 0 et 30, puis créer un tableau de décodage en utilisant la clé d.

Établir une formule qui permet de trouver les restes de N^d pour tout N entre 0 et 30… en s'inspirant de la méthode utilisée à la main.

B Démonstration

1. Justifier que $n^{p-1} \equiv 1\,(p)$.

2. Montrer qu'il existe des entiers naturels d et k tels que $ed = k\,(p - 1) + 1$.

3. Soit N tel que $N \equiv n^e\,(p)$. En utilisant ce qui précède, justifier que $N^d \equiv n\,(p)$.

Culture et mathématiques p. 42

Les exercices

Application

PGCD

Cours partie 1

1 Déterminer le PGCD de :

1. 523 et 235 **2.** 792 et – 262

2 Déterminer $d = pgcd(a\ ;\ b)$, et trouver deux entiers u et v tels que $au + bv = d$:

1. $a = 1\,235$ et $b = 235$ **2.** $a = -30\,030$ et $b = 7\,854$

3 Déterminer $d = pgcd(a\ ;\ b)$, et trouver deux entiers u et v tels que $au + bv = d$:

1. $a = 336$ et $b = 2\,730$ **2.** $a = -1\,241$ et $b = -5\,423$

4 Utiliser les décompositions en produit de nombres premiers de a et b pour déterminer leur PGCD.

1. $a = 303$ et $b = 111$ **2.** $a = 56\,000$ et $b = 24\,000$

3. $a = 5\,040$ et $b = 256$ **4.** $a = 5\,665$ et $b = 7\,931$

5 Deux entiers naturels non nuls a et b sont tels que $pgcd(a\ ;\ b) = 7$, $a \leqslant 50$ et $b \leqslant 50$.

Déterminer toutes les valeurs possibles de a et b.

6 Soit n un entier naturel non nul. Utiliser le théorème de Bézout pour déterminer le PGCD de a et b.

1. $a = n^2$ et $b = n + 1$

2. $a = 21n + 4$ et $b = 14n + 3$

7 Soit n un entier naturel.

1. Justifier que $pgcd(2n - 1\ ;\ 9n + 4)$ divise 17.

2. En utilisant les congruences, déterminer les valeurs de n telles que $2n - 1$ et $9n + 4$ sont multiples de 17.

3. Déterminer alors, suivant les valeurs de n, le PGCD de $2n - 1$ et $9n + 4$.

8 Soit n un entier naturel.

Déterminer le PGCD de $2^n + 3^n$ et $2^{n+1} + 3^{n+1}$.

9 **1.** Déterminer le plus grand entier naturel n tel que quand on divise 501 par n le reste est 15 et quand on divise 946 par n le reste est 1.

2. Quel est l'ensemble des entiers relatifs ayant ces propriétés ?

10 VRAI OU FAUX ?

Répondre par vrai ou faux, en justifiant la réponse.

Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls.

$\Delta(a\ ;\ b)$ est l'ensemble des diviseurs communs à a et b.

1. Si $\Delta(a\ ;\ b) = \Delta(c\ ;\ d)$, alors $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(c\ ;\ d)$.

2. Si $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(c\ ;\ d)$, alors $\Delta(a\ ;\ b) = \Delta(c\ ;\ d)$.

3. $pgcd(a\ ;\ bc) = pgcd(ab\ ;\ c)$.

Entiers premiers entre eux

Cours partie 2

11 Les entiers a et b sont-ils premiers entre eux ?

1. $a = 333$ et $b = 444$ **2.** $a = 323$ et $b = 343$

12 Les entiers a et b sont-ils premiers entre eux ?

1. $a = 537$ et $b = 735$ **2.** $a = 935$ et $b = 1\,428$

13 Soit a et b deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

Déterminer tous les couples $(a\ ;\ b)$, avec $a \geqslant b$, tels que :

1. $ab = 11\,495$ et $d = 11$ **2.** $a + b = 51$ et $a - b = d$

14 Soit a et b deux entiers naturels non nuls, et d leur PGCD.

Déterminer tous les couples $(a\ ;\ b)$, avec $a \geqslant b$, tels que :

1. $ab = 108$ et $a + b = 7d$ **2.** $a^2 + b^2 = 117$ et $a - b = d$

15 VRAI OU FAUX ?

Répondre par vrai ou faux, en justifiant la réponse.

Soit a et b deux entiers.

1. Si a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux.

2. Si $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux, alors a et b sont premiers entre eux.

Équations $ax + by = c$

Exercice résolu 2

16 Utiliser le théorème de Gauss pour résoudre les équations où x et y sont des entiers relatifs :

1. $7x = 13y$ **2.** $8x = 17y$ **3.** $8x = 12y$

17 Justifier qu'il n'existe aucun couple d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solution de l'équation.

1. $2x + 4y = 3$ **2.** $14x + 35y = 3$

18 **1.** Déterminer le PGCD de 75 et 28.

2. Justifier qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tels que $75u + 28v = 1$, puis déterminer un tel couple.

3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ tels que $75x + 28y = 1$.

19 Résoudre les équations où x et y sont des entiers relatifs.

1. $7x + 5y = 1$ **2.** $7x + 5y = 12$

20 Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation proposée, puis déterminer ceux de ces couples où x et y appartiennent à l'intervalle I.

1. $7x + 12y = 1$ $I = [-50\ ;\ 50]$

2. $187x + 78y = 1$ $I = [-400\ ;\ 400]$

3. $30x + 35y = 100$ $I = [-70\ ;\ 100]$

4. $8x + 5y = 10$ $I =]0\ ;\ +\infty[$

21 **1.** Déterminer le PGCD de 378 et 294.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $7x \equiv 5\ (9)$.

3. On considère l'équation *(E)* d'inconnues entières :

$$378x + 294y = 210.$$

a. Simplifier cette équation et déterminer une solution particulière de *(E)* en utilisant **2.**

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de *(E)*.

22 Martin ne dispose que de bons d'achats de 16 euros, et son amie Anne n'a que des bons d'achats de 10 euros.

1. Martin souhaite acheter à Anne un objet qu'elle vend 76 euros en échangeant des bons d'achats.

Combien doit-il donner de bons de 16 euros, et combien Anne lui rendra-t-elle de bons de 10 euros ?

2. Pourra-t-il acheter l'objet si Anne le vend 75 euros ?

PPCM

Cours partie 3

23 Déterminer le PPCM de :

1. 27 et 495 **2.** 7 et 343

24 Déterminer le PPCM de :

1. 1 080 et 630 **2.** 156 et 1 105

25 Utiliser les décompositions en produit de nombres premiers de a et b pour déterminer leur PPCM :

1. $a = 303$ et $b = 111$ **2.** $a = 56\,000$ et $b = 24\,000$

26 Soit a et b deux entiers naturels non nuls, d leur PGCD et m leur PPCM.
Déterminer tous les couples $(a\,;b)$, avec $a \geqslant b$, tels que :

1. $d = 18$ et $m = 90$ **2.** $m = 72$ et $a - b = d$

27 Soit a et b deux entiers naturels non nuls, d leur PGCD et m leur PPCM.
Déterminer tous les couples $(a\,;b)$, avec $a \geqslant b$, tels que :

1. $a^2 + b^2 = 325$ et $m = 30$ **2.** $m = 210d$ et $a - b = d$

Théorème de Fermat

Cours partie 3

28 Soit n un entier naturel et $a = n^7 - n$.

1. Montrer que a est divisible par 7.

2. Montrer que a est divisible par 42.

29 Soit n un entier naturel.
Montrer que $9n^8 - 16n^2$ est un multiple de 7.

30 Soit n un entier naturel.
Montrer que $7^{544} + 2^{1\,156}$ est un multiple de 17.

Approfondissement

PGCD et PPCM

Cours partie 3

31 **1.** Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ tels que $x \leqslant y$, $pgcd(x\,;y) = 7$ et $ppcm(x\,;y) = 252$.

2. Parmi tous les couples trouvés, déterminer ceux dont le quotient est égal au carré d'un rationnel.

32 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent en supposant que $pgcd(x\,;y) = 7$ et $ppcm(x\,;y) = 1\,764$.

33★ Soit a et b deux entiers naturels non nuls, d leur PGCD et m leur PPCM.
Montrer que $d = pgcd(m\,;a + b)$.

34 Soit p un nombre premier et n un entier naturel non nul. Montrer que $p \wedge n = 1$ ou que p divise n.

35★ **1.** Soit p un nombre premier et a un entier relatif.
Justifier que, si p divise a^2, alors p divise a.

2. Soit x et y deux entiers naturels non nuls.
Justifier que, si x et y sont premiers entre eux, alors $x^2 + y^2$ et xy sont premiers entre eux.

36 Soit n un entier supérieur à 2.

1. a. Démontrer que le PGCD de $n - 2$ et $n + 4$ est le même que le PGCD de $n - 2$ et 6.

b. En déduire les valeurs possibles du PGCD de $n - 2$ et $n + 4$.

c. Déterminer alors les valeurs de n telles que $n + 4$ soit un multiple de $n - 2$.

2. En utilisant la calculatrice, que peut-on conjecturer concernant le PGCD de $n - 2$ et $n^2 + 2n - 7$?
Démontrer cette conjecture en utilisant le théorème de Bézout.

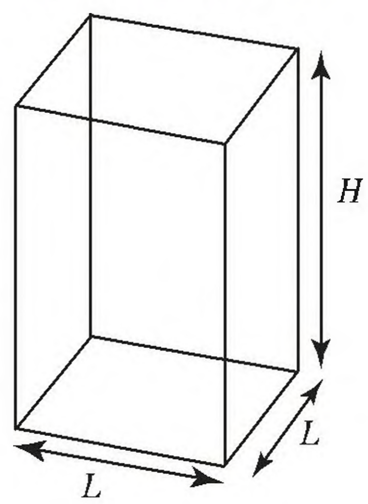
3. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $(n^2 + 2n - 7)(n + 4)$ soit multiple de $(n - 2)$.

37 Soit n un entier naturel.

1. Justifier que $pgcd(5n + 1\,;n + 4)$ divise 19.

2. Déterminer, suivant les valeurs de n, le PGCD de $5n + 1$ et $n + 4$.

38 La boîte B représentée ci-dessous est un pavé droit.



1. On veut remplir cette boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes doivent remplir B sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question $L = 882$ et $H = 945$.
Quelle est la plus grande valeur possible de a ?
Quelles sont toutes les valeurs possibles de a ?

b. Dans cette question B a pour volume $v = 77\,760$ et on sait que la plus grande valeur possible de a est alors 12.
Montrer qu'il y a alors exactement 2 boîtes B possibles dont on donnera les dimensions.

2. Soit c un entier naturel non nul. On veut remplir une caisse cubique C d'arête c avec des boîtes B, toutes identiques (les boîtes B doivent remplir C sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question $L = 882$ et $H = 945$. Quelle est la plus petite valeur possible de c ? Quel est l'ensemble des valeurs possibles de c ?

b. Dans cette question B a pour volume 15 435 et on sait que la plus petite valeur possible de c est alors 105.
Quelles sont les dimensions L et H de la boîte B ?

39 ★ Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que si a et b sont deux entiers naturels tels que $a > b$, alors $n^a - 1 > n^b - 1$.

2. a. Montrer que $n^8 - 1 = n^3(n^5 - 1) + n^3 - 1$, est la division euclidienne de $n^8 - 1$ par $n^5 - 1$.

b. Écrire l'algorithme d'Euclide permettant de déterminer le PGCD de $n^8 - 1$ et $n^5 - 1$ et en déduire ce PGCD.
Comparer avec l'algorithme donnant $pgcd(8\,;5)$.

c. Déterminer, en écrivant l'algorithme correspondant, le PGCD de $n^8 - 1$ et $n^6 - 1$.
Comparer avec l'algorithme donnant $pgcd(8\,;6)$.

3. a. Montrer que $n^{10} - 1 = (n^6 + n^2)(n^4 - 1) + n^2 - 1$, est la division euclidienne de $n^{10} - 1$ par $n^4 - 1$.

b. En déduire le PGCD de $n^{10} - 1$ et $n^4 - 1$, en écrivant l'algorithme correspondant.
Comparer avec l'algorithme donnant $pgcd(10\,;4)$.

4. Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b > 0$, et $a = bq + r (0 \leqslant r < b)$ la division euclidienne de a par b.

a. Déterminer l'entier N tel que la division euclidienne de $n^a - 1$ par $n^b - 1$ s'écrive :

$$n^a - 1 = N(n^b - 1) + n^r - 1.$$

b. On note $d = pgcd(a\,;b)$. Montrer que le PGCD de $n^a - 1$ et $n^b - 1$ est égal à $n^d - 1$.

40 ★ On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$ et, pour tout entier $n > 0$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout $n > 0$, $u_{n+2} \equiv u_n (4)$.
En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2\ (4)$ et $u_{2k+1} \equiv 0\ (4)$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28\ (100)$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Équations $ax + by = c$

Cours partie 2

41 **1.** On considère, dans un repère cartésien, la droite d'équation $y = -0{,}91x + 0{,}12$.
Déterminer 2 points de cette droite ayant des coordonnées entières.

2. Pourrait-on répondre à la même question si la droite avait pour équation $y = -0{,}12x + 0{,}91$?

42 **1. a.** Simplifier l'équation $(E) : 32x - 18y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

b. Résoudre (E).

2. Un lycée compte n élèves, avec $n \leqslant 1\,000$.
Déterminer le nombre d'élèves possibles, sachant que, lorsqu'on les regroupe par 32, il reste 5 élèves, alors que si on les regroupe par 18, il en reste 7.

43 Cette scène se déroule en France au XIXe siècle.
Un soir dans une auberge s'arrêtent plusieurs diligences. Des hommes et des femmes, moins nombreuses, s'attablent. À l'issue du repas, chaque homme doit payer 19 sous et chaque femme 13 sous.
Sachant qu'à la fin du repas l'aubergiste a récolté exactement 1 000 sous, retrouver combien d'hommes et de femmes ont mangé à l'auberge ce soir là.

44 En 1925 le diamètre des pièces de 5 francs était de 37 mm et celui des pièces de 2 francs de 27 mm.
Un collectionneur de pièces anciennes décide de juxtaposer des pièces de ces deux types, les centres étant tous alignés, jusqu'à obtenir une largeur de 1 mètre exactement.

1. Peut-il y parvenir ? Si oui, comment doit-il s'y prendre ?

2. Aurait-il pu y parvenir si la pièce de 5 francs avait eu un diamètre de 36 mm ?

45 **1.** On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de (E).

b. Résoudre (E).

2. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple $(a\,;b)$ d'entiers vérifiant : $N = 8a + 1$ et $N = 5b + 2$.

a. Montrer que le couple $(a\,;-b)$ est solution de (E).

b. Quel est le reste dans la division de N par 40 ?

46 **1.** Décomposer 82 en produit de nombres premiers.

2. On considère l'équation $(6x + 10y)(4x - y) = 82$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(x_0\,;y_0) = (2\,;7)$ est une solution de cette équation.

b. Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs solutions de cette équation.

47 ★ On dispose de jetons bleus et verts ; les jetons bleus valent 7 euros et les jetons verts 11 euros.
On souhaite déterminer les sommes que l'on peut obtenir en utilisant ces jetons.
Dans tout l'exercice, x désigne un entier naturel.

1.a. Soit m un entier naturel. Établir un tableau donnant les restes de $11m$ dans la division par 7 pour m entier naturel tel que $0 \leqslant m < 7$.

b. Justifier qu'il existe un entier m, vérifiant $0 \leqslant m < 7$, tel que $x - 11m$ soit divisible par 7.

c. En déduire qu'il existe deux entiers relatifs m et n, avec $0 \leqslant m < 7$, tels que $x = 11m + 7n$.

d. Montrer que l'on peut obtenir toute somme supérieure ou égale à 77 euros avec moins de 7 jetons verts.

2. a. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tels que $11u + 7v = 1$.

b. Ce résultat permet-il d'obtenir simplement **tous** les couples d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tels que $11u + 7v = 59$?

c. En utilisant un tableur, vérifier qu'il n'existe pas d'entiers naturels m et n tels que $11m + 7n = 59$.

Retrouver ce résultat en déterminant tous les couples d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tels que $11u + 7v = 59$.

3. a. Quelle conjecture peut-on faire concernant l'obtention de sommes supérieures ou égales à 60 euros ?

b. Soit x tel que $60 \leqslant x \leqslant 66$. Examiner les restes de x dans la division euclidienne par 7.

Utiliser les résultats du **1. a** pour en déduire que tout entier x tel que $60 \leqslant x \leqslant 66$ s'écrit $11m + 7n$ avec m et n entiers naturels.

c. Démontrer la conjecture du **3. a**.

Théorèmes de Bézout, Gauss et Fermat

Cours partie 2

48 **1.** Soit p un nombre premier et n un entier naturel non nul. Montrer que $p \wedge n = 1$ ou que p divise n.

2. Soit x un entier relatif tel que $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ soit divisible par 5.

a. Montrer qu'il existe un entier relatif y tel que $(xy - 1)$ soit divisible par 5.

b. En déduire que $x^3(4y^3 + 3y^2 + 2y + 1)$ est divisible par 5, puis que $4y^3 + 3y^2 + 2y + 1$ est divisible par 5.

AIDE On remarquera que $xy \equiv 1\ (5)$.

49 Soit p un nombre premier et a et b deux entiers relatifs.

1. Montrer que p divise le produit ab si, et seulement si, p divise a ou p divise b.

2. En déduire qu'un nombre premier divise un produit si, et seulement si, il divise l'un de ses facteurs.

50 Soit p et q deux nombres premiers distincts et a et b deux entiers relatifs.

Montrer que si $a \equiv b\,(p)$ et $a \equiv b\,(q)$, alors $a \equiv b\,(pq)$.

51 Soit a et b deux entiers non nuls premiers entre eux.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $a \wedge b^n = 1$.

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et p,

$$a^p \wedge b^n = 1.$$

52 Soit n un entier naturel non multiple de 3, non multiple de 7 et non multiple de 13.

Montrer que $n^{12} - 1$ est divisible par 273.

53 Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $n^{15} - n^3$ est divisible par 3 640.

2. Montrer que $n^{13} - n$ est divisible par 2 730.

54 Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls.

Montrer que $a^{4b+d} - a^{4c+d}$ est divisible par 30.

55 Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, le nombre $\dfrac{n^7}{7} + \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{23n}{35}$ est un nombre entier.

56 **1.** Montrer que 1 729 n'est pas un nombre premier et donner sa décomposition en produit de nombres premiers.

2. Montrer que 1 728 est divisible par 4 et par 9.

3. Soit n un entier naturel.

Montrer que, si $n \wedge 1\,729 = 1$, alors $n^{1\,728} \equiv 1\ (1\,729)$.

Autrement dit : la réciproque du petit théorème de Fermat est fausse.

57 Soit p et q deux nombres premiers distincts.

Montrer que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1\ (pq)$.

AIDE On pourra commencer par raisonner modulo p ou modulo q.

58 Soit p un nombre premier impair. Montrer que, pour tout entier naturel n, $(n + 1)^p \equiv n^p + 1\ (2p)$.

59 **1.** Soit x un entier naturel. Montrer que $x^4 \equiv 1\,(5)$ ou que $x^4 \equiv 0\ (5)$.

2. En déduire que l'équation $x^4 + 781 = 3y^4$, où x et y sont des entiers naturels, n'a pas de solution.

60 Soit l'équation $(E) : x^3 - y^3 = 999$, où x et y sont des entiers naturels non nuls.

1. Étudier le cas $y = 1$.

On suppose pour les questions **2** et **3** que $y \geqslant 2$.

2. Montrer que $x \geqslant 11$, puis que $y \geqslant 7$.

3. a. Utiliser le théorème de Fermat pour montrer que $x - y$ est divisible par 3. En déduire que $x \geqslant y + 3$.

b. Montrer que $999 \geqslant 9y^2 + 27y + 27$ et en déduire que $y \leqslant 10$.

4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

61 ★ Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

1. Étude d'exemples

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

b. Prouver que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.

c. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

d. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?

e. À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

2. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

a. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1\ (p)$.

b. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1\ (p)$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1\ (p)$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.
Démontrer que $4^r \equiv 1\ (p)$. En déduire que $r = 0$.

c. Prouver que $4^n - 1$ est divisible par p si, et seulement si, n est multiple de b.

d. En déduire que b divise $p - 1$.

62 Allo Juliette, ici Roméo !

Roméo souhaite communiquer de façon secrète avec Juliette.
Pour cela, il décide d'utiliser un codage à base de congruences : grâce à l'ordre alphabétique, il numérote chaque lettre de l'alphabet de 1 à 26. Ainsi, A correspond à 1 et Z à 26.

1. Il décide de coder son message de la façon suivante :
Il remplace chaque lettre de l'alphabet par le reste dans la division euclidienne par 26 de son numéro, noté n, multiplié par 16.
Ainsi, A $(n = 1)$ est codé par la lettre correspondant au reste dans la division euclidienne de 16×1 par 26, c'est-à-dire par la 16e lettre de l'alphabet, P.

a. Coder le message « Viens me voir ».

b. Quel est le problème ?

2. Roméo décide maintenant de considérer le reste dans la division euclidienne de $17n$ par 26.

a. Justifier que, si p et q sont deux entiers distincts compris entre 1 et 26, alors $17p$ et $17q$ n'ont pas le même reste modulo 26.

b. Coder le message « Viens me voir » à l'aide de cette méthode.

c. Proposer une méthode « directe » pour décoder un message.

d. Décoder la réponse de Juliette « lqlq jgsb lqk ».

63 ★ Des entiers particuliers

Soit p un nombre premier, a et b des entiers naturels non nuls tel que $a \wedge p = 1$ et $b \wedge p = 1$.

1. Montrer que $(ab) \wedge p = 1$.

2. On pose : $F_p(a) = \dfrac{a^{p-1} - 1}{p}$.

a. Montrer que $F_p(a)$ est un entier naturel.

b. Montrer que $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b)\ (p)$.

AIDE Remarquer que $(a^{p-1} - 1)(b^{p-1} - 1) \equiv 0\ (p^2)$.

64 ★ Une conséquence du théorème de Fermat

Soit q un entier premier strictement supérieur à 3 et $M_q = 2^q - 1$. On veut montrer que, si p est un diviseur premier de M_q, alors p est congru à 1 modulo q.

1. Soit n un entier naturel non nul tel que $2^n \equiv 1\ (p)$.

a. Supposons que $q = nd + r$ avec d entier naturel et $0 < r < n$. Prouver qu'alors $2^r - 1 \equiv 0\ (p)$.

b. Déduire de ce qui précède que, si n est le plus petit entier naturel non nul tel que $2^n \equiv 1\ (p)$, alors n divise q, et donc $n = q$.

2. En utilisant le petit théorème de Fermat, démontrer de même que le plus petit entier n tel que $2^n \equiv 1\ (p)$ divise $p - 1$. En déduire le résultat souhaité.

Problèmes

65 ★ Messages secrets

On considère l'équation $(E) : 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. a. Déterminer le PGCD de 109 et 226.
Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Déterminer une solution particulière de (E), puis l'ensemble des solutions de (E).

c. En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. Préciser les valeurs de d et e.

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers naturels a tels que $a \leqslant 226$.
On considère les deux fonctions f et g de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ définies de la manière suivante :

- à tout entier a de $\mathcal{A}$, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.
- à tout entier a de $\mathcal{A}$, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Déterminer $g(f(0))$.

b. Soit a un entier non nul de $\mathcal{A}$. Quel est le reste dans la division euclidienne de a^{226} par 227 ?

c. En utilisant ce qui précède, prouver que, quel que soit l'entier a de $\mathcal{A}$, $g(f(a)) = a$.
Peut-on dire que $f(g(a)) = a$?

4. On décide d'utiliser ce qui précède pour coder un message. On attribue, à chaque lettre de l'alphabet, un numéro de 1 à 26 égal à sa place dans l'ordre alphabétique. On applique alors la fonction f afin de coder le message.

a. Justifier, en utilisant **3**, que le codage est bien possible, c'est-à-dire que deux lettres différentes sont codées par deux nombres différents.

b. On souhaite coder la lettre B, qui porte le numéro 2.
Déterminer successivement les restes dans la division euclidienne par 227 de : 2^8 ; 29^6 ; 12^2 et 2^{13}.
En déduire $f(2)$, puis le nombre permettant de coder B.

c. Comment peut-on s'y prendre pour décoder un message ?

66 Des points dans un plan

1. On considère l'équation $(E) : 6x + 7y = 57$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ solution de $6u + 7v = 1$. En déduire une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On appelle $\mathcal{P}$ le plan d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$ et on considère l'ensemble Δ des points du plan $\mathcal{P}$ qui appartiennent aussi au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Quelle est la nature de Δ ?

b. Montrer qu'un seul point de Δ a des entiers naturels pour coordonnées et déterminer ses coordonnées.

3. On considère un point M du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.
Montrer que les entiers naturels x, p et q vérifient la relation $x + p + 4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

e. Montrer que tous ces points appartiennent à deux droites parallèles contenues dans le plan $\mathcal{P}$.

67 ★ Équation de Pythagore

On s'intéresse ici à l'ensemble des triplets d'entiers naturels non nuls $(x\,;y\,;z)$ solutions de l'équation (E) :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

A. Méthode de Diophante

On considère l'équation (E') : $u^2 + v^2 = 1$.
On cherche tous les couples $(u\,;v)$ de nombres rationnels strictement positifs vérifiant (E').

1. À quel ensemble appartiennent les points M du plan dont les coordonnées sont des solutions de (E') ?

2. Soit $(u\,;v)$ un couple de rationnels strictement positifs solution de (E'), M le point de coordonnées $(u\,;v)$ et A le point de coordonnées $(-1\,;0)$.
Justifier que le coefficient directeur de la droite (AM) est un nombre rationnel.

3. Réciproquement, soit r un nombre rationnel tel que $0 < r < 1$ et Δ la droite de coefficient directeur r passant par A. La droite Δ recoupe le cercle de centre O et de rayon 1 en M.
Justifier que les coordonnées de M sont rationnelles.

4. En écrivant les rationnels r sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $0 < p < q$ et $p \wedge q = 1$ (r est alors irréductible), décrire l'ensemble des solutions de (E'), puis de (E).

B. Méthode d'Euclide

1. Justifier que, pour résoudre l'équation (E), il suffit de résoudre (E'') : $a^2 + b^2 = c^2$, avec a, b et c entiers naturels non nuls ayant pour plus grand diviseur commun 1.

2. Soit $(a\,;b\,;c)$ un triplet d'entiers naturels non nuls solution de (E'').

a. Supposons que a et b soient impairs. Justifier qu'alors $a^2 + b^2 \equiv 2\ (4)$. En déduire que, nécessairement, l'un des deux entiers, a ou b, est pair.

b. Supposons que b soit pair. Pourquoi a est-il nécessairement impair ? Quelle est la parité de c ?

c. En déduire qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $a + c = 2p$ et $c - a = 2q$.

d. Exprimer b^2 en fonction de p et q puis prouver que $p \wedge q = 1$. En déduire qu'il existe des entiers u et v tels que $p = u^2$ et $q = v^2$.

e. Exprimer alors a, b et c en fonction de u et v.

3. Donner l'ensemble des triplets solutions de (E).

Pour l'exercice 68, voir dans les pages Culture une évocation du système RSA.

68 ★ Le système RSA

A. Étude mathématique

Soit p et q deux nombres premiers distincts et $n = pq$.

1. Soit a un entier naturel tel que $a \wedge n = 1$.

a. Montrer que $a \wedge p = 1$ et $a \wedge q = 1$.

b. Montrer que $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$.

c. En déduire que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\ (p)$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel k,
$$a^{k(p-1)(q-1)} \equiv 1\ (p).$$

e. Montrer de même que, pour tout entier naturel k,
$$a^{k(p-1)(q-1)} \equiv 1\ (q).$$

f. En déduire que, pour tout entier naturel k,
$$a^{k(p-1)(q-1)} \equiv 1\ (n) \text{ et } a^{k(p-1)(q-1)+1} \equiv a\ (n).$$

2. Soit a un entier naturel multiple de p et tel que $a < n$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel k,
$$a^{k(p-1)(q-1)+1} \equiv a\ (p).$$

b. Montrer que $a \wedge q = 1$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel k,
$$a^{k(p-1)(q-1)} \equiv 1\ (q) \text{ et } a^{k(p-1)(q-1)+1} \equiv a\ (q).$$

d. En déduire que, pour tout entier naturel k,
$$a^{k(p-1)(q-1)+1} \equiv a\ (n).$$

3. Conclure que pour tous entiers naturels a et k,
si $a < n$, alors $a^{k(p-1)(q-1)+1} \equiv a\ (n)$.

B. Application au codage

Soit p et q deux nombres premiers distincts, $n = pq$ et e un entier naturel premier avec $(p-1)(q-1)$.

1. Montrer qu'il existe des entiers naturels d et k tels que
$$ed = k(p-1)(q-1) + 1.$$

2. Soit a un entier naturel tel que $a < n$.

a. Soit c l'entier naturel tel que $c \equiv a^e\ (n)$ et $0 \leqslant c < n$.
Montrer que $c^d \equiv a\ (n)$.

b. Justifier alors que c permet de coder a.

C. Le système RSA

• On code un entier $a < n$ par $c \equiv a^e\ (n)$ avec $0 \leqslant c < n$.
Le couple $(n\,;e)$ est appelé clé de codage ou clé publique.

• On décode en calculant $c^d \equiv a\ (n)$.
L'entier d est appelé clé de décodage ou clé privée.

1. On donne $n = 2\,759$ et $e = 7$.

a. Coder les lettres du mot MATIN en prenant M = 12, A = 00, T = 19, I = 08 et N = 13 (numérotation habituelle des lettres dans l'ordre alphabétique).

b. Coder le mot MATIN en codant les nombres 1 200, 1 908 et 1 326 : ces nombres sont obtenus en regroupant les lettres 2 par 2 (le numéro 26 représentant l'espace après le N). On pourra commencer par décomposer les nombres à coder en produit de nombres premiers.

c. Peut-on, dans ce cas particulier, regrouper les lettres 3 par 3 pour coder un mot ?

d. Trouver les nombres premiers p et q et en déduire une clé de décodage d convenable.

2. Expliquer pourquoi, si p et q sont très grands et inconnus du public, la clé de codage $(n\,;e)$ peut être connue de tous, d'où son nom de clé publique.

Type Bac

69 VRAI OU FAUX ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.

2. Soit a et b des entiers naturels non nuls.
S'il existe des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 5$, alors le PGCD de a et b est égal à 5.

3. Si u et v sont des entiers relatifs tels que $5u - 7v = 1$, alors $u \wedge v = 1$.

4. Si $n \equiv 1\ (7)$ alors $pgcd(3n + 4\ ;\ 4n + 3) = 7$.

5. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.

6. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2^n - 1$ n'est jamais divisible par 9.

7. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation $24x + 35y = 9$ est l'ensemble des couples :

$$(-144 + 70k\ ;\ 99 - 24k), \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

8. $5^{750} - 1$ est divisible par 7.

9. $2^{781} + 3^{1\,562}$ est divisible par 11.

10. $7^{103} - 7^{95}$ est divisible par 30.

70 ROC **Restitution organisée de Connaissances**

QUESTION DE COURS

> ***Prérequis :*** On suppose connu le théorème de Bézout :
> « Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$. »

Énoncer le théorème de Gauss et le démontrer en utilisant le théorème de Bézout.

APPLICATION

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) $\begin{cases} n \equiv 13\ (19) \\ n \equiv 6\ (12) \end{cases}$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que $19u + 12v = 1$.
On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple.
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre

$$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$$

est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S) ; vérifier que le système (S) équivaut au système (S′) $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ (12) \end{cases}$

b. Démontrer que (S′) équivaut à $n \equiv n_0\ (12 \times 19)$.

3. a. Trouver un couple $(u\ ;\ v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$.
Quel est le reste r de cette division ?

71 ROC **Restitution organisée de Connaissances**

QUESTION DE COURS

> ***Prérequis :*** On suppose connu le résultat suivant :
> Soit a et b deux entiers non nuls et $d = pgcd(a\ ;\ b)$, pour tout entier **naturel** non nul k : $pgcd(ka\ ;\ kb) = kd$.

Soit a, b et d des entiers non nuls. Montrer que le PGCD de a et b est égal à d si, et seulement si, il existe des entiers non nuls a' et b' tels que $a = da'$, $b = db'$ et $a' \wedge b' = 1$.

APPLICATION

Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $(5n + 2) \wedge (2n + 1) = 1$.

2. En déduire $pgcd(35n + 14\ ;\ 14n + 7)$.

72 EP **Épreuve pratique** TICE

On considère la suite (S_n) d'entiers naturels définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

On s'intéresse au PGCD de S_n et S_{n+1}.

1. Conjectures à l'aide d'un tableur

a. Réaliser une feuille de calcul permettant de calculer en colonne les valeurs de S_n pour n entier de 1 à 8 :
- dans la première colonne figureront les valeurs de n.
- dans la deuxième colonne figureront les valeurs de n^3.
- dans la troisième colonne figureront les valeurs de S_n.

b. Compléter alors la feuille de calcul en réalisant l'algorithme d'Euclide permettant de déterminer le PGCD de deux entiers naturels non nuls.

c. Déterminer alors le PGCD de S_n et S_{n+1} pour n entier de 1 à 7.

d. Conjecturer alors le PGCD de S_n et S_{n+1} :
- lorsque n est pair
- lorsque n est impair

2. Démonstrations

a. Justifier que, quel que soit $n > 0$, $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.
En déduire une formule explicite de S_n en fonction de n.

b. Démontrer les conjectures réalisées au **1.**

PRODUCTION DEMANDÉE

- la feuille de calcul et les conjectures de la question **1**,
- les justifications écrites de la question **2**.

73 EP **Épreuve pratique** TICE

L'objectif est de déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le PGCD de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

1. Conjecture à l'aide du tableur

a. Réaliser une feuille de calcul permettant de déterminer un PGCD par l'algorithme d'Euclide.

b. Déterminer le PGCD de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$ pour les premières valeurs de n et émettre une conjecture concernant le PGCD de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$ pour n entier naturel non nul.

2. Démonstration

Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = 4^n - 1$.

a. Montrer que, pour tout $n > 0$, u_n est divisible par 3.
b. Déterminer une formule de récurrence donnant u_{n+1} en fonction de u_n.
c. Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, le PGCD de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

PRODUCTION DEMANDÉE

- la feuille de calcul et la conjecture de la question **1**,
- les justifications écrites de la question **2**.

74 EP **Épreuve pratique** TICE

Le but de cet exercice est le codage et le décodage d'un message utilisant le « chiffrement à clé secrète ».
Le message choisi est une citation de Mignon McLaughlin (journaliste et écrivain américain, 1913-1983).

Préliminaire : En informatique, on associe à chaque caractère (lettre de l'alphabet, chiffre, signe de ponctuation, ...) un code numérique que l'on appelle son code ASCII (American Standard Code for Information Interchange) : par exemple, le code de A est 65, celui de B est 66, celui de a est 97, celui de l'espace est 32...
Le code utilisé est un entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant 255$.

Syntaxe : Dans la plupart des tableurs, la fonction « code » renvoie le code ASCII. La fonction réciproque est notée « car ».
On entre « = code("A") » pour obtenir le nombre 65 et on entre « = car(65) » pour obtenir la lettre A.

A. Expérimentation

1. Codage

a. En utilisant le code ASCII, coder le message suivant :

Dans l'arithmétique de l'amour, un plus un égale

Dans la zone de saisie du message, on ne mettra qu'une seule lettre ou caractère de ponctuation par cellule et on n'oubliera pas de taper un espace pour séparer les mots.
La zone de saisie du message est la ligne 1 à partir de la cellule B1. Le message codé avec le code ASCII apparaîtra sur la ligne 2 à partir de la cellule B2.
b. Le code ASCII ne constituant pas un codage bien secret, la ligne 3 consiste à coder la ligne des codes ASCII en utilisant la méthode suivante :
On note C la fonction de codage qui, à tout n, entier tel que $0 \leqslant n \leqslant 255$, associe le reste de la division de $7n$ par 256.
Soit $C(n)$ ce reste.
Compléter le tableau réalisé en **1.a.**, en y ajoutant à la ligne 3, les restes $C(n)$ correspondant à chaque code n de la ligne 2.
Le tableau ci-dessous donne le début de la phrase et du codage à obtenir :

	A	B	C	D	E	F	G
1	message	*D*	*a*	*n*	*s*		*l*
2	code ASCII	68	97	110	115	32	108
3	message codé	220	167	2	37	224	244

2. Décodage à l'aide de la clé secrète.
La fin de la citation de Mignon McLaughlin est codée par :

244	17	223	2	202	223	2	223	224
195	44	224	188	195	51	72	224	251
9	223	2	37	224	51	2	224	95
209	167	244	224	86	95	30	9	

Pour décoder la fin de cette citation, on note D la fonction de décodage qui, à tout entier k, tel que $0 \leqslant k \leqslant 255$, associe le reste de la division de $183k$ par 256.
Entrer en ligne 3 les nombres codés ci-dessus, puis sur la ligne 2, utiliser la fonction D pour obtenir les codes ACSII de la fin de la citation.
Enfin, faire afficher sur la ligne 1 la fin de la citation de Mignon McLaughlin.

B. Démonstrations

1. Justification du codage.
Pour le codage ASCII, deux lettres de l'alphabet sont codées par deux nombres distincts. Il faut s'assurer que le codage choisi au **A.1.b.** code deux nombres n et p distincts, compris entre 0 et 255, par deux nombres distincts.
a. Montrer que, si $C(n) = C(p)$ alors $7(n - p) \equiv 0 \ (256)$.
b. En déduire que $n = p$. Justifier alors que le codage est valide.

2. Justification du décodage.
a. Vérifier que $183 \times 7 \equiv 1 \ (256)$ et en déduire que $183 \times (7n) \equiv n \ (256)$.
b. Expliquer pourquoi la fonction D, qui associe à k le reste de la division de $183k$ par 256, assure le décodage attendu.

PRODUCTION DEMANDÉE

- le tableau avec codage et décodage de la citation de Mignon McLaughlin de la partie **A**,
- les justifications écrites de la partie **B**.

75 Soit n un entier naturel non nul.
On pose $a = 4n + 3$, $b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b.
1. Donner la valeur de d dans chacun des cas suivants :
$n = 1$, $n = 11$ et $n = 15$.
2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.
3.a. Déterminer les entiers naturels n tels que $4n + 3$ soit multiple de 7.
b. Déterminer les entiers naturels n tels que $5n + 2$ soit multiple de 7.
4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
a. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
b. Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ? Donner, dans ce cas, la valeur de $ppcm(4n + 3 ; 5n + 2)$ en fonction de n.
5. Soit $\alpha = 4n^2 - n - 3$ et $\beta = 5n^2 - 3n - 2$.
a. Factoriser α et β.
b. On pose $\Delta = pgcd(\alpha ; \beta)$.
Déterminer Δ en fonction de d et n.
c. Calculer Δ pour $n = 15$ et $n = 16$.

76 x et y désignent des entiers naturels non nuls tels que $x < y$. $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des couples $(x ; y)$ tels que $pgcd(x ; y) = y - x$.

1. Déterminer $pgcd(363 ; 484)$.
Le couple $(363 ; 484)$ appartient-il à $\mathcal{S}$?

2. Soit n un entier naturel non nul.
Le couple $(n ; n + 1)$ appartient-il à $\mathcal{S}$?

3. Montrer qu'un couple $(x ; y)$ appartient à $\mathcal{S}$ si, et seulement si, il existe un entier naturel non nul k tel que

$$x = k(y - x) \quad \text{et} \quad y = (k + 1)(y - x).$$

4. En déduire que pour tout couple $(x ; y)$ de $\mathcal{S}$ on a

$$ppcm(x ; y) = k(k + 1)(y - x).$$

5. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples $(x ; y)$ de $\mathcal{S}$ tels que $ppcm(x ; y) = 228$.

77 Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.
On considère des suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies par

$$a_n = 4 \times 10^n - 1,\ b_n = 2 \times 10^n - 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2 \times 10^n + 1.$$

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.

2. a. Quelles conjectures peut-on faire concernant la divisibilité de a_n, b_n et c_n par 3 ?
Démontrer ces conjectures.

b. Déterminer, pour tout n, le PGCD de a_n et c_n.

3. a. Le nombre b_3 est-il premier ? Justifier.

b. Factoriser a_{2n}.

c. Déduire des deux questions précédentes la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

4. a. Démontrer que $pgcd(b_n ; c_n) = pgcd(c_n ; 2)$ et en déduire le PGCD de b_n et c_n.

b. On considère l'équation (E_n) : $b_n x + c_n y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
Justifier que cette équation admet une solution.

c. Déterminer le reste dans la division de c_n par b_n, puis écrire la division euclidienne de b_n par 2.

d. En déduire une solution particulière de (E_n).

e. Résoudre l'équation (E_n).

78 **1.** On considère l'équation (E_1) : $5u + 7v = 24$, où u et v sont des entiers relatifs.

a. Déterminer une solution particulière de (E_1).

b. Résoudre (E_1).

c. Déterminer les solutions de (E_1) où u et v sont des entiers **naturels**.

2. u et v étant des entiers **naturels**, on considère l'équation (E)
$7x^3 + ux^2 + vx = 5$, où x est un nombre **rationnel positif**.

a. On pose $x = \dfrac{p}{q}$, avec $p > 0$, $q > 0$ et $p \wedge q = 1$.

Utiliser le théorème de Gauss pour montrer que p est un diviseur de 5 et q un diviseur de 7.

b. En déduire que x ne peut prendre que 4 valeurs et donner ces valeurs.

c. Montrer que x ne peut pas être un nombre entier.

3. Montrer, en utilisant la question **1**, qu'il existe un unique couple $(u ; v)$ tel que $x = \dfrac{5}{7}$ soit solution de (E).

4. Montrer qu'il existe au moins un couple $(u ; v)$ tel que $x = \dfrac{1}{7}$ soit solution de (E).

79 **Décrocher le pompon**

Partie A

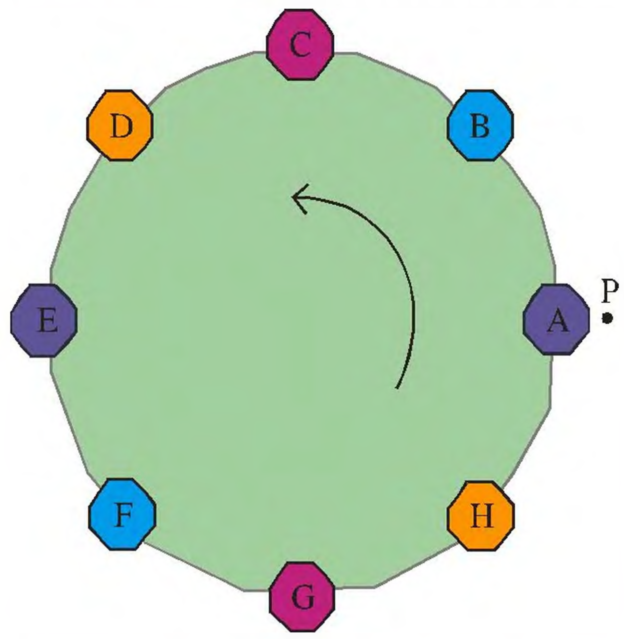
On considère l'équation (E) : $13x - 16y = 8$, où x et y sont des entiers relatifs.

1. Montrer que le couple $(8 ; 6)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E).

Partie B

Dans une fête foraine se trouve un manège représenté ci-dessous : il comporte 8 chevaux de bois nommés **A** à **H** et répartis régulièrement sur le manège.
Le manège tourne dans le sens trigonométrique et met exactement 16 secondes pour faire un tour.
Un pompon apparaît au point **P** toutes les 13 secondes après le départ du manège, et on ne peut le décrocher que si un cheval est en face du point **P** à la seconde où le pompon apparaît.



1. Quand le manège démarre le cheval, **A** est en face du point **P**, comme sur la figure.
Lors d'une séance le manège tourne pendant exactement 2 minutes et 40 secondes.
Où se trouve le cheval **A** quand le manège s'arrête ?

2. Jean-Pierre achète un billet pour une séance sur le manège. Impatient et très désireux de décrocher le pompon, il s'installe sur le cheval **A**.
A-t-il une chance de décrocher le pompon ?

3. Jean-Pierre achète alors un autre billet pour une séance sur le manège et il s'installe sur le cheval **E**.
On note p le nombre d'apparitions du pompon après le départ du manège et q le nombre de tours effectués par Jean-Pierre une fois que le cheval **E** est passé devant le point **P**.

a. Montrer que Jean-Pierre ne peut décrocher le pompon que si $(p ; q)$ est solution de (E).

b. En déduire que Jean-Pierre pourrait décrocher le pompon avant la fin de la séance.

4. Au moment où Jean-Pierre s'installe sur le cheval **E**, sa copine Patricia, qui elle aussi veut décrocher le pompon, s'installe sur le cheval **G**.
Montrer, en considérant l'équation $13x - 16y = 4$ (où x et y sont des entiers relatifs), que Patricia décrochera le pompon avant Jean-Pierre.

5. a. Déterminer une solution particulière de l'équation $13x - 16y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.

b. Résoudre alors l'équation $13x - 16y = 2a$, où x et y sont des entiers relatifs et a un entier naturel non nul.

c. Quel cheval Jean-Pierre aurait-il intérêt à choisir, pour être sûr d'être le premier à décrocher le pompon ?

Pour préparer le BAC

Retrouver les solutions sur : www.bordas-pixel.fr/TleS

Durée : 30 minutes

ROC

Prérequis • On suppose connues les propriétés de divisibilité.
• Si a et b sont deux entiers non nuls, on appelle PGCD de a et b, et on note $pgcd(a\ ;\ b)$ le plus grand entier naturel d tel que d divise a et d divise b.

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
Démontrer que, quel que soit l'entier relatif q, $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(b\ ;\ a - bq)$.

APPLICATION
Soit n un entier relatif.

1. Développer et réduire $A = 5n^3 - n - (19 - n)(n + 2)$.
Justifier qu'il existe k entier tel que $A = k(n + 2) - 38$.

2. En utilisant **1.** et la question de cours, démontrer que

$$pgcd(5n^3 - n\ ;\ n + 2) = pgcd(n + 2\ ;\ 38).$$

3. Déduire de ce qui précède les valeurs possibles du PGCD de $5n^3 - n$ et $n + 2$, puis les valeurs de n telles que $5n^3 - n$ soit un multiple de $n + 2$.

AIDE
On peut faire une conjecture à la calculatrice.

Durée : 30 minutes

QCM

Pour chacune des questions proposées, une seule réponse est correcte.
On demande de choisir la bonne réponse, mais aucune justification n'est demandée.

1. Le reste dans la division de 2^{221} par 13 est égal à :

a. 2 **b.** 1 **c.** 6 **d.** 0

2. L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation $15x + 25y = 10$ est donné par (k et k' sont des entiers relatifs) :

a. $x = -5 + 5k$ et $y = -5 - 3k$ **b.** $x = -1 + 3k$ et $y = 1 - 5k$
c. $x = -1 + 5k$ et $y = 1 - 3k$ **d.** $x = -1 + 3k$ et $y = 1 - 5k'$

3. Soit x et y deux entiers relatifs non nuls.
Si $pgcd(3x + y\ ;\ 2x + 3y) = 5$, alors $pgcd(x\ ;\ y)$ est égal à :

a. 5 **b.** 20 **c.** 10 **d.** 1

Durée : 1 heure

EXERCICE

Deux phares dans la nuit....

Au large d'une côte, deux phares éclairent de dangereux rochers.
Le premier phare, noté P_1, émet un signal lumineux éclairant les rochers toutes les 33 secondes tandis que le second, noté P_2, émet un signal lumineux toutes les 57 secondes.
À 21 heures, le phare P_1 a éclairé les rochers et, 12 secondes plus tard, le phare P_2 a, à son tour, éclairé les rochers.
On souhaite déterminer, à la seconde près, la prochaine heure, notée H, à laquelle les deux phares éclaireront simultanément les rochers.

1. Une période est l'intervalle de temps entre deux signaux lumineux émis par un phare.
On appelle p le nombre de périodes écoulées entre 21 h et l'heure H pour P_1, et q le nombre de périodes écoulées entre 21 h et l'heure H pour P_2.
Justifier que le couple $(p\ ;\ q)$ est solution de l'équation $(E) : 11x - 19y = 4$.

2. a. Déterminer un couple $(x_0\ ;\ y_0)$ d'entiers solution de l'équation $11x - 19y = 1$.

b. En déduire un couple $(p_0\ ;\ q_0)$ d'entiers solution de (E).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

d. En déduire p et q et déterminer l'heure H.

3. Les phares cessent toute activité à 7 h du matin.

a. Combien de fois, entre 21 h et 7 h du matin, les rochers auront-ils été éclairés simultanément ?

b. À quelle heure les deux phares éclaireront-ils simultanément les rochers pour la dernière fois ?

Durée : 1 heure

EP Épreuve pratique TICE

Soit n un entier naturel. On souhaite déterminer le PGCD de $4n + 3$ et $n + 7$ en fonction de n.

1. En utilisant un tableur, réaliser une feuille de calcul permettant d'obtenir le PGCD de deux nombres a et b saisis respectivement en A2 et B2.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la feuille de calcul

AIDE
En A2 et B2, remplacer les valeurs par une formule.

2. Compléter la feuille pour pouvoir saisir une valeur de n en F2 puis calculer le PGCD de $a = 4n + 3$ et $b = n + 7$.

Conjecturer alors les valeurs de $pgcd(4n + 3\ ;\ n + 7)$ en fonction de n.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture

3. a. Justifier que $pgcd(4n + 3\ ;\ n + 7)$ divise 25.

b. En raisonnant modulo 5, déterminer les entiers naturels n tels que

$$pgcd(4n + 3\ ;\ n + 7) = 1.$$

AIDE
On pourra travailler modulo 25.

c. Démontrer alors la conjecture.

PRODUCTION DEMANDÉE

- la feuille de calcul réalisée avec un tableur de la question **1.**,
- la conjecture de la question **2.**,
- les justifications écrites de la question **3.**

PISTES ET CONSEILS

ROC

Question de cours : penser à procéder par double inclusion.

1. Factoriser $5n^3 + n^2 - 18n$.

3. Attention : si b divise a, alors $pgcd(a\ ;\ b) = |b|$; il ne faut pas oublier les cas où $(n + 2)$ est négatif !

QCM

1. Écrire 221 comme un produit et utiliser le théorème de Fermat.

2. On peut faire des vérifications simples.

3. Utiliser un exemple simple pour trouver la bonne réponse.

EXERCICE

1. Utiliser p, puis q, pour compter le temps écoulé entre 21 h et H.

2. et **3.** Voir l'exercice résolu 2.

ÉPREUVE PRATIQUE

1. Voir la page TICE de ce chapitre.

3. a. Plusieurs méthodes possibles : par exemple, éliminer les n par combinaison linéaire de $4\,n + 3$ et $n - 7$, ou trouver u et v tels que $au + bv = 25$.

b. et **c.** Raisonner par disjonction des cas.

TICE

Voir les TICE, p.131

Programmer un algorithme

FICHIERS disponibles sur le site www.bordas-pixel.fr/TleS : Solutions sous Excel, OpenOffice, TI-Nspire, Casio, TI.

Programmer l'algorithme d'Euclide donnant le PGCD de deux nombres entiers naturels *a* et *b* puis l'utiliser pour déterminer le PGCD de 2 145 et 123.

Avec un tableur

• On souhaite saisir des formules au tableur permettant de calculer *pgcd*(*a* ; *b*) comme présenté ci-dessous :

	A	B	C	D
1	a	b	q	r
2	2145	123	17	54
3	123	54	2	15
4	54	15	3	9
5	15	9	1	6
6	9	6	1	3
7	6	3	2	0

• Sur la ligne 2, *a* et *b* sont saisis.
On sait, d'après le cours, que *q* est la partie entière de $\frac{a}{b}$.
En **C2**, on saisit donc = ENT(A2/B2).
Puis, en **D2**, on tape = MOD(A2 ;B2).
• On doit, à la ligne 3, réitérer le processus en remplaçant *a* par *b* et *b* par *r*.
On tape donc en **A3** : = B2 ; en **B3** : = D2
• Il reste à recopier l'ensemble des formules vers le bas.

On peut souhaiter que le tableur n'écrive rien une fois l'algorithme terminé. Pour cela, on ajoute des tests à chaque ligne.

C2 — *fx* =SI(ESTNUM(B2);ENT(A2/B2);"")

	A	B	C	D
1	a	b	q	r
2	9	8	1	1
3	8	1	8	0
4	1			

• La fonction ESTNUM(cellule) permet de savoir si une cellule contient ou non un nombre. La formule saisie en **C2** permet de n'afficher un résultat que si **B2** contient un nombre. Sinon, on laisse la cellule vide en la remplissant avec un texte « vide ».
À priori, il faudrait aussi vérifier que B2 > 0, mais cela ne sera pas nécessaire.

• En **A3**, on recopie toujours le nombre écrit en **B2** (ce qui donnera, le cas échéant, une cellule vide); on tape donc = B2.
• En **B3**, on ne recopie le reste précédent que s'il est strictement positif : sinon, on a terminé. On tape donc = SI(D2>0;D2;"").
On voit donc que la colonne B ne contient jamais de nombres inférieurs ou égaux à 0. En particulier, la formule saisie en **C2** peut donc être recopiée vers le bas.
Enfin, en **D2**, on tape = SI(ESTNUM(B2);MOD(A2 ;B2);"").

Avec la calculatrice

On utilise un algorithme comme ci-contre pour calculer le PGCD de deux entiers naturels *A* et *B*.
À chaque étape, on calcule un quotient et un reste, puis on remplace *A* par *B* et *B* par *R*.

Il nous reste à déterminer la condition d'arrêt, ainsi que les formules.
Condition d'arrêt
On souhaite afficher le dernier reste non nul. Il faut donc arrêter avant de calculer un reste nul.
La condition d'arrêt peut être « *A*/*B* est un entier », ce que l'on peut traduire, par exemple, par : Tant que E(*A*/*B*) ≠ *A*/*B*.
Formules
Le quotient Q est égal à la partie entière de $\frac{A}{B}$. On saisira donc E(A/B) → Q.
Le reste *R* est alors obtenu par : $A - B \times Q \to R$.

```
Demander A
Demander B
Si E(A/B)=A/B, alors B → R
Sinon
Tant que Condition d'arrêt
        Formule1 → Q
        Formule2 → R
        B → A
        R → B
Fin Si
Afficher R.
```

Applications

1. Adapter le programme calculatrice pour obtenir le PGCD de nombres entiers relatifs.
2. Réaliser un algorithme permettant de déterminer le reste dans la division de a^p par *q* si *a* et *p* sont grands, en calculant successivement les restes de *a*, a^2, a^3, a^4… par *q*. L'appliquer pour calculer le reste de 157^{82} dans la division par 233.

Similitudes

3



Avant de commencer

→**Nombres complexes, enseignement obligatoire,** chap. 5 et 6, p. 153 et 183

→**Mémento :** p. 140

Le cours

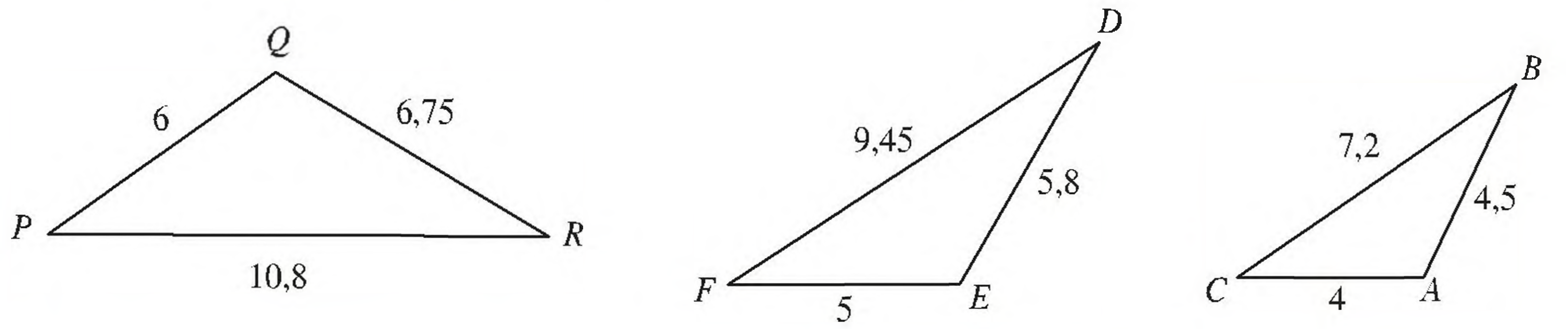
Les TICE du chapitre

Les similitudes permettent d'étudier dans le plan des figures qui, comme ces poupées russes, sont à la fois différentes et semblables.

Retrouver les solutions des exercices repérés par www. sur :
www.bordas-pixel.fr/TleS

1 Reconnaître des triangles semblables

Sur la figure ci-dessous, trois triangles sont représentés avec les mesures de leurs côtés. Deux de ces trois triangles sont semblables. Les identifier en écrivant les rapports de distances nécessaires et préciser tous les couples d'angles géométriques égaux.
Ces triangles sont-ils directement ou indirectement semblables ?



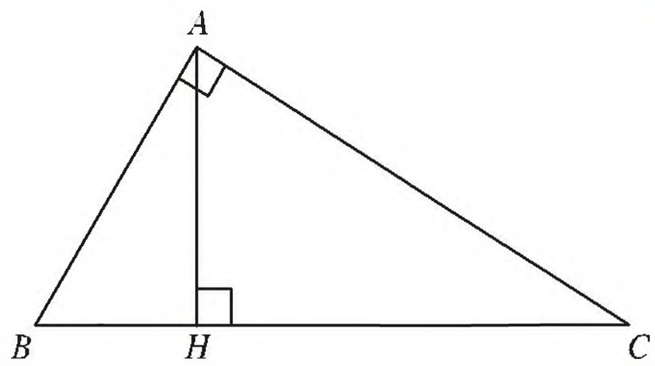
2 Utiliser les triangles semblables

ABC est un triangle direct rectangle en A et H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Montrer que les triangles ABC, HBA et HAC sont semblables.

2. En déduire que $BA^2 = BH \times BC$ et que $AB \times AC = AH \times BC$.

3. Donner un angle orienté égal à l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.



3 Revoir les transformations du plan

Le plan complexe étant muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A\,(1 + 2i)$, $B\,(5)$ et $C\,(4 - i)$.

1. Faire une figure et représenter les images de A, B et C par les transformations f suivantes :

a. f est la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

b. f est l'homothétie de centre $\Omega\,(3)$ et de rapport 2.

c. f est la translation de vecteur $\vec{w}(2 + 3i)$.

d. f est la réflexion ayant pour axe la droite d'équation $y = x$.

2. Décrire, dans chaque cas, la transformation f^{-1}, réciproque de f.

3. Donner, dans les trois premiers cas, l'écriture complexe de f.

4 Étudier une transformation complexe

Le plan complexe étant muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A\,(1 + 2i)$, $B\,(5)$ et $C\,(4 - i)$.
Soit f la transformation d'écriture complexe $z' = 2iz - 3i$.

a. Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$.

b. Représenter les triangles ABC et $A'B'C'$ et montrer que ces triangles sont semblables.

5 Composer des isométries

$ABCD$ est un carré direct de centre O. Le point E est le symétrique de C par rapport à B.
On note s_1 la réflexion d'axe (AB), s_2 la réflexion d'axe (AC), s_3 la réflexion d'axe (CD), r_1 la rotation de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre E et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
Reconnaître, sans justification, dans les isométries décrites ci-dessus ou dans d'autres isométries à décrire, les transformations composées suivantes :

a. $s_2 \circ s_1$ **b.** $s_1 \circ s_3$ **c.** $r_2 \circ r_1$ **d.** $r_1 \circ s_1$

Memento p. 140

Les activités

ACTIVITÉ 1 Triangles semblables

Sur la figure ci-dessous, sont représentés quatre triangles semblables entre eux.

Le but de cette activité est de déterminer des transformations dans lesquelles le triangle ABC a pour image les autres triangles. Pour y parvenir, il faudra, dans chaque cas, composer plusieurs transformations : rotations, homothéties et réflexions.

1 Transformer *ABC* en *DEF*

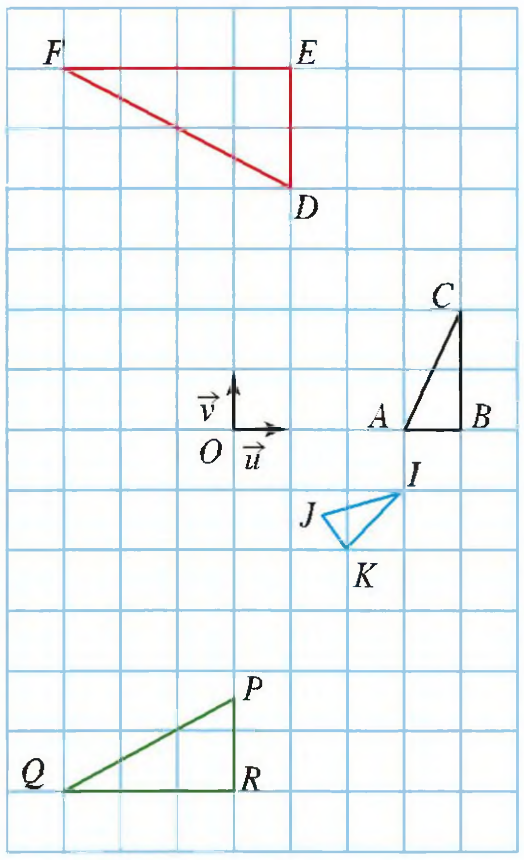
a. Les triangles ABC et DEF sont-ils directement ou indirectement semblables ? Quelles doivent être les images respectives des points A, B et C ?

b. Trouver une homothétie h et une rotation r telles que DEF soit l'image de ABC dans la composée $h \circ r$ ou dans la composée $r \circ h$.

c. Trouver au moins 2 solutions à la question précédente.
Trouver une solution où h et r ont même centre.

d. Qu'y a-t-il de commun à toutes les homothéties trouvées ? Qu'y a-t-il de commun à toutes les rotations trouvées ? Expliquer.

e. Dans quel(s) cas l'ordre dans lequel on effectue h et r est-il important ?
Dans quel cas cet ordre est-il indifférent ?



2 Transformer *ABC* en *IJK*

Reprendre les mêmes questions que dans le cas précédent.

3 Transformer *ABC* en *PQR*

a. Les triangles ABC et PQR sont-ils directement ou indirectement semblables ? Quelles doivent être les images respectives des points A, B et C ?

b. Trouver une homothétie h et une réflexion s telles que PQR soit l'image de ABC dans la composée $h \circ s$ ou dans la composée $s \circ h$.

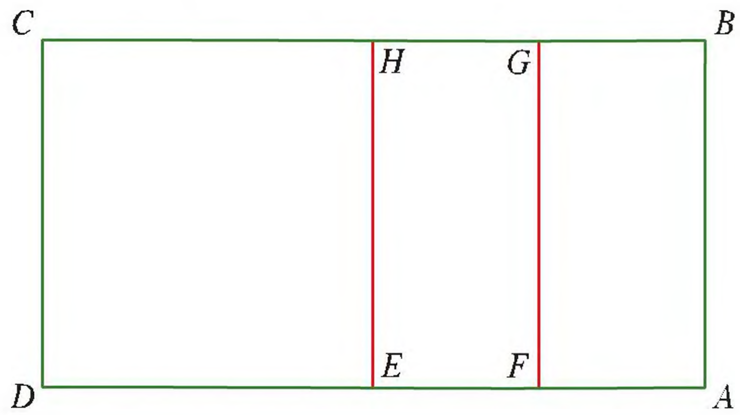
c. Trouver au moins deux solutions à la question précédente. Trouver une solution où le centre de h est sur l'axe de s. Montrer que, dans ce cas, $h \circ s = s \circ h$.

4 Comment pourrait-on, réciproquement, transformer DEF en ABC ? PQR en ABC ?

PROBLÈME OUVERT

ACTIVITÉ 2 Où est le centre ?

Les rectangles $ABCD$ et $EFGH$ sont directement semblables et $BC = 2AB$, $FG = 2EF$.
Les points E et H sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$.



Pour transformer $EFGH$ en $ABCD$, il faut composer une homothétie de rapport 2 et une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. On impose comme condition supplémentaire que ces deux transformations aient le même centre.
Déterminer le centre commun à une homothétie h et à une rotation r telles que $ABCD$ soit l'image de $EFGH$ dans les deux composées $h \circ r$ et $r \circ h$.

1 Définitions

Dans tout ce chapitre, les angles orientés seront identifiés par leur mesure principale.
Quand on lira $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \theta$, il faudra comprendre $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \theta + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

RAPPEL Une transformation du plan est une bijection du plan.

Définition On appelle **similitude plane** toute transformation f du plan qui conserve les rapports de distances : si A, B, C et D sont quatre points distincts du plan, alors $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$ avec $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ et $D' = f(D)$.

RAPPEL L'identité est la transformation du plan qui à tout point M associe M.

EXEMPLES Les rotations, les homothéties, les symétries centrales, les translations, les réflexions, l'identité sont des similitudes planes.

Remarque On dira plus simplement similitude pour similitude plane.

Théorème Une transformation f du plan est une similitude si et seulement si elle multiplie les distances par un réel k ($k > 0$). k est appelé **rapport de la similitude f**.

RAPPEL On utilise, pour ce premier point, une propriété connue de la proportionnalité : faire les produits en croix pour la retrouver.

DÉMONSTRATION

• $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$ est équivalent à $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$.

En posant $k = \frac{C'D'}{CD}$ on a, pour tout couple de points distincts A et B, $\frac{A'B'}{AB} = k$ et donc $A'B' = kAB$.
Les distances sont bien multipliées par k, qui est **strictement** positif car $C' \neq D'$.

• *Réciproquement*, si les distances sont multipliées par k, alors $A'B' = kAB$ et $C'D' = kCD$. Alors, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD} = k$; f est une similitude car elle conserve les rapports de distances.

EXEMPLES Dans une homothétie de rapport – 3, on a évidemment $k = 3$ car le rapport d'une similitude est strictement positif ($k > 0$).
Les rotations, les symétries centrales, les translations, les réflexions et l'identité conservent les distances (ce sont des **isométries**) elles ont donc pour rapport $k = 1$.

INFO La composée de 2 isométries est donc une isométrie ; de même la réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Théorème La composée d'une similitude de rapport k et d'une similitude de rapport k' est une similitude de rapport kk'.
La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

DÉMONSTRATION

Si une transformation multiplie les distances par k et si une autre les multiplie par k' alors, en les composant, on multiplie les distances par kk'.
La composée est donc une similitude de rapport kk'.
La réciproque d'une application qui multiplie les distances par k doit diviser les distances par k, c'est à dire les multiplier par $\frac{1}{k}$. C'est donc une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

INFO Voir les exemples de l'activité 1 : l'ordre des transformations est souvent important.

Remarque Si f et g sont des similitudes de rapport k et k' alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux similitudes de rapport kk' mais, en général, $f \circ g$ est différent de $g \circ f$.
Ce sont des similitudes distinctes qui ont le même rapport.

Théorème Une similitude conserve les angles géométriques : si A, B et C sont trois points distincts, alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

RAPPEL
Si trois points A, B et C sont alignés il y en a toujours un entre les deux autres. Ici, on suppose que B est entre A et C.

DÉMONSTRATION

• Trois points distincts A, B et C sont alignés dans cet ordre si, et seulement si, $AB + BC = AC$.
Pour tout réel $k > 0$, $AB + BC = AC \Leftrightarrow kAB + kBC = kAC \Leftrightarrow A'B' + B'C' = A'C'$.
Alors, A', B' et C' sont alignés si, et seulement si, A, B et C sont alignés.
On en conclut que, dans une similitude qui multiplie les distances par $k > 0$, l'image d'un triangle (trois points non alignés) est un triangle.

• Une similitude conserve les rapports de distances donc elle transforme tout triangle ABC en un triangle $A'B'C'$ qui est semblable à ABC. De plus, quand deux triangles sont semblables, les angles géométriques correspondants sont égaux. Il y a donc bien conservation des angles géométriques.

Remarque Ce résultat nous conduit à admettre qu'il n'y a que deux familles de similitudes.

Voir les exemples de l'activité 1.

Définition • On appelle **similitude directe** une similitude qui conserve les angles orientés : si A, B et C sont trois points distincts, alors $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

• On appelle **similitude indirecte** une similitude qui transforme un angle orienté en son opposé : $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

EXEMPLES Les rotations, les homothéties, les symétries centrales, les translations, l'identité sont des similitudes directes. Les réflexions sont des similitudes indirectes.

Le cours en action

Une similitude transforme toute figure en une figure semblable

Une similitude conserve les rapports de distances et les angles géométriques donc elle conserve :
– l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité.
– le milieu, le barycentre.

En conséquences, une similitude transforme un segment en un segment, une droite en une droite, un cercle en un cercle, un carré en un carré, etc.

De façon générale, elle transforme toute figure en une figure de même nature semblable à la figure d'origine, les distances étant multipliées par le rapport k et les aires par k^2.

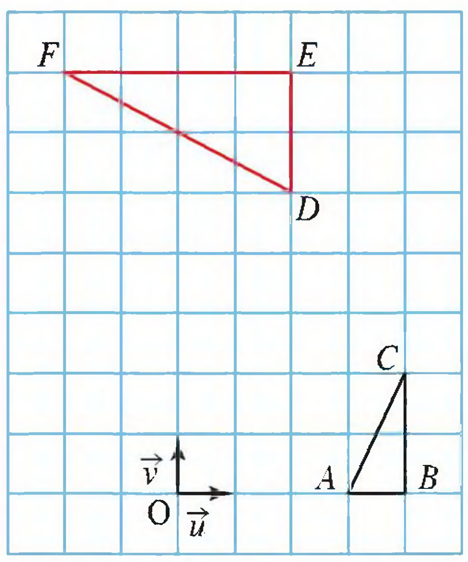
Si la similitude est **directe**, la figure d'origine et la figure image sont de **même sens** : elles sont toutes les deux directes ou toutes les deux indirectes.

Si la similitude est **indirecte**, la figure d'origine et la figure image sont de **sens contraires**.

Activité 1 et Exercices 5 à 10

Déterminer le rapport d'une similitude

Reprenons en partie la figure de l'activité 1.



Il est facile de déterminer le rapport de la similitude qui transforme ABC en DEF. $f(A) = D$ et $f(B) = E$ donc le rapport cherché vaut $\frac{DE}{AB} = 2$ (il est clair, dans ce cas, que les distances sont multipliées par 2).

Pour déterminer le rapport d'une similitude, il suffit de connaître les images de deux points distincts.

Exercices 1 à 4

2 Similitudes directes : éléments caractéristiques

Théorème Soit f une similitude directe. Pour tout couple de points distincts A et B, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$ est constant. On l'appelle **angle** de f.

DÉMONSTRATION

Soit A, B, C et D quatre points distincts. On a, en utilisant la relation de Chasles, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) + \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) + \left(\overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{CD}\right)$. f conserve les angles orientés, donc $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$, soit $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = -\left(\overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}\right)$.

On obtient bien le résultat cherché : $\theta = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$ ne dépend pas des points A et B.

Théorème Une similitude directe f a une **écriture complexe** de la forme $z' = az + b$ ($a \neq 0$). Réciproquement, pour tous complexes a et b ($a \neq 0$), $z' = az + b$ décrit une similitude directe de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \arg(a)$; on a alors $z' = ke^{i\theta} z + b$.

DÉMONSTRATION

• Le plan complexe étant muni du repère orthonormal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on note b l'affixe du point $O' = f(O)$. Soit M (z) un point distinct de O et $M' = f(M)$.

Posons $a = \dfrac{z' - b}{z}$. Or $k = \dfrac{O'M'}{OM} = \left|\dfrac{z' - b}{z}\right| = |a|$ et $\theta = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}\right) = \arg\left(\dfrac{z' - b}{z}\right) = \arg(a)$;

on connaît le module et l'argument de a ; a est donc indépendant de z et de z' et $a = ke^{i\theta}$.

> **RAPPEL**
> Un complexe non nul est déterminé quand on connaît son module et l'un de ses arguments.

De $a = \dfrac{z' - b}{z}$ on déduit $z' = az + b$ avec $a \neq 0$ car $k > 0$.

Ce résultat, établi pour $z \neq 0$, est encore vrai pour $z = 0$, qui donne $z' = b$ (affixe de O').

• *Réciproquement*, soit A, B et C trois points distincts.

On déduit de $z' = az + b$ que $A'B' = |z_{B'} - z_{A'}| = |a(z_B - z_A)| = |a| \times |z_B - z_A| = |a| \times AB$, ce qui montre que f est une similitude de rapport $k = |a|$ car elle multiplie les distances par k.

On déduit de même que

$$\frac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \frac{a(z_C - z_A)}{a(z_B - z_A)} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A},$$

ce qui montre, en prenant les arguments des deux extrémités de l'égalité, que $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et que f est une similitude directe car elle conserve les angles orientés.

Enfin, de $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$, on déduit que l'angle de f est égal à $\theta = \arg(a) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$.

Théorème Les translations et les rotations sont les seules isométries directes. On les appelle des **déplacements**.

DÉMONSTRATION

Une isométrie directe est une similitude directe de rapport $k = |a| = 1$.

Si $a = 1$, alors l'isométrie directe a pour écriture complexe $z' = z + b$: c'est la translation de vecteur $\vec{w}(b)$.

Sinon $a = e^{i\theta}$, avec θ non nul, et l'isométrie directe a pour écriture complexe $z' = e^{i\theta} z + b$: c'est une rotation d'angle θ non nul.

INFO
Un **point invariant**, ou **point fixe**, d'une transformation est un point confondu avec son image.

Théorème Si la similitude directe f d'écriture complexe $z' = az + b$ n'est pas une translation ($a \neq 1$), elle admet un unique point invariant Ω appelé **centre** de f.

DÉMONSTRATION

Un point invariant, ou point fixe, est tel que $f(\Omega) = \Omega$.

Il faut donc résoudre l'équation $z' = z$. Elle donne $z = az + b$ qui a une unique solution $\frac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$, donc si f n'est pas une translation.

RAPPEL
La démonstration est identique à celles réalisées pour les rotations et les homothéties.

Remarques

• Une similitude directe qui n'est pas une translation et qui a un centre $\Omega(\omega)$ a pour écriture complexe : $z' - \omega = a(z - \omega)$ équivalente à $z' = az + b$.

• Une similitude directe qui n'est pas une translation est caractérisée par son centre, son rapport et son angle : elle est parfaitement déterminée quand on connaît ces trois éléments car on connaît alors son écriture complexe : $z' - \omega = a(z - \omega)$.

Le cours en action

Se méfier

Déterminer le rapport et l'angle d'une similitude directe avec le coefficient a

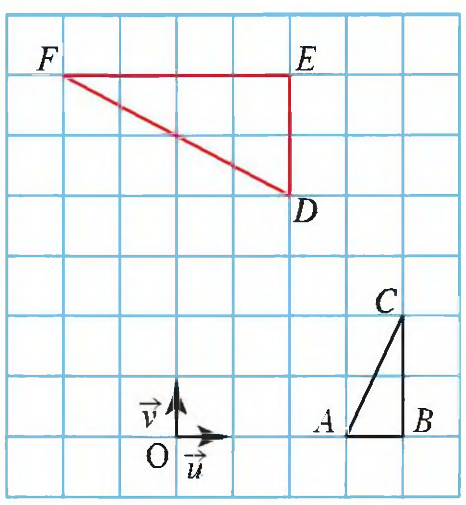
• La similitude directe d'écriture complexe $z' = -2iz + i$ a pour rapport $2 = |-2i|$ (il est strictement positif) et pour angle $-\frac{\pi}{2} = \arg(-2i)$.

• La symétrie centrale $z' = -z + 3i$ a pour rapport 1 (c'est une isométrie) et pour angle $\pi = \arg(-1)$.

Le signe (–) du coefficient a ne doit pas induire en erreur dans la détermination du rapport et de l'angle de la similitude directe.

Exercices 11 et 12

Déterminer l'angle d'une similitude directe



L'angle de la similitude directe qui transforme ABC en DEF vaut $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Pour déterminer l'angle d'une similitude directe, il suffit de connaître les images de deux points distincts.

Exercices 1 à 4

Le coefficient a de l'écriture complexe détermine la nature de la similitude directe f

• **Si $a = 1$, l'écriture complexe $z' = z + b$ montre que f est la translation de vecteur $\vec{w}(b)$.**
Une similitude directe de rapport 1 et d'angle nul est une translation. Si, de plus, elle a au moins un point fixe elle est l'identité.

• **Si $a = -1$, l'écriture complexe $z' = -z + b$ montre que f est une symétrie centrale.**
Une symétrie centrale est aussi une rotation d'angle $\pi = \arg(-1)$ ou une homothétie de rapport -1.

• **Si $a = k$ réel différent de 1 et de 0, l'écriture complexe $z' = kz + b$ montre que f est une homothétie de rapport k.**

• **Si $a = e^{i\theta}$ et $a \neq 1$, l'écriture complexe $z' = e^{i\theta} z + b$ montre que f est une rotation d'angle θ non nul.**

• **Dans tous les autres cas (a non réel et $|a| \neq 1$), la similitude directe f caractérisée par son centre, son rapport et son angle, est une nouvelle transformation.**

Exercices 11 et 12

3 Similitudes directes : propriétés

INFO
Ce résultat est mis en évidence sur les deux premiers exemples de l'activité 1.

Théorème

Soit f une similitude directe de rapport k et d'angle θ. Si f n'est pas une translation ($a \neq 1$) et a pour centre Ω (ω), alors $f = h \circ r = r \circ h$, où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k et r la rotation de centre Ω et d'angle θ.
Cette décomposition est appelée **forme réduite** de f.

DÉMONSTRATION

h et r ayant pour écritures complexes respectives $z' - \omega = k(z - \omega)$ et $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, $h \circ r$ et $r \circ h$ ont toutes deux pour écriture complexe $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega) = a(z - w)$ qui est bien l'écriture complexe de f.

Remarques

• Dans le cas général ($a \neq 1$), une similitude directe est donc la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.
• Quand le rapport k est égal à 1, la similitude directe est une rotation (l'homothétie h est alors l'identité) ; quand l'angle θ est nul, la similitude directe est une homothétie (la rotation r est alors l'identité).

INFO
On doit avoir $A \neq B$ et $A' \neq B'$, mais on peut avoir $A = A'$ ou $B = B'$, notamment quand A (ou B) est le centre de f.

Théorème

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan complexe tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
Il existe une unique similitude directe f telle que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.

DÉMONSTRATION

• Si f existe, le coefficient $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ est parfaitement déterminé ($a \neq 0$ puisque $A' \neq B'$).
L'écriture complexe de f est alors $z' = az + b$ avec $b = z_A' - az_A$ car $A' = f(A)$; le coefficient b est, lui aussi, parfaitement déterminé. Si f existe, elle est donc unique.
• Il suffit maintenant de vérifier que la similitude f définie ci-dessus répond bien à la question.
D'une part, d'après ce qui précède, $z_A' = az_A + b$. D'autre part, on vérifie facilement que $a\,z_B + b = z_B'$.
• Conclusion : la similitude f, telle que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, existe et est unique.

INFO
f a pour rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et pour angle $\theta = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$.

Remarque

Une similitude directe est parfaitement déterminée quand on connaît les images de deux points distincts.

INFO
Ce résultat est valable si f (ou g) est une translation.

Théorème

Soit f une similitude directe de rapport k, d'angle θ et g une similitude directe de rapport k', d'angle θ'.
Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des similitudes directes de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.
En général, $f \circ g$ est différente de $g \circ f$.

DÉMONSTRATION

Si f et g ont pour écritures complexes $z' = az + b$ et $z' = a'z + b'$, alors $f \circ g$ a pour écriture complexe $z' = a(a'z + b') + b = (aa')z + (ab' + b)$ et $g \circ f$ a pour écriture complexe

$$z' = a'(az + b) + b' = (aa')z + (a'b + b').$$

On voit que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des similitudes directes puisque $aa' \neq 0$ et qu'elles ont pour rapport $k\,k'$ car $|aa'| = |a| \times |a'|$.
Elles ont pour angle $\theta + \theta'$ car $\arg(aa') = \arg(a) + \arg(a')$.
De plus, $f \circ g$ est différente de $g \circ f$, dans le cas général, car les coefficients $(ab' + b)$ et $(a'b + b')$ ne sont pas, a priori, égaux.

INFO
$f \circ g$ et $g \circ f$ n'ont pas le même centre, en général.

INFO
Ce théorème ne concerne pas les translations qui n'ont pas de centre.

Théorème Si f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k, d'angle θ, alors sa réciproque f^{-1} est la similitude directe de même centre Ω, de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

DÉMONSTRATION
D'après le théorème précédent, en composant les transformations décrites ci-dessus, on trouve une similitude directe de rapport $k \times \frac{1}{k} = 1$, d'angle $\theta - \theta = 0$ et qui a au moins un point invariant, le point Ω.
La composée est donc l'identité. Ces deux transformations sont bien réciproques l'une de l'autre.

Le cours en action

Calculer le coefficient a d'une similitude directe définie par les images de 2 points

ÉNONCÉ **Montrer que, pour $A \neq B$, $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$.**

SOLUTION La similitude directe a pour écriture complexe : $z' = az + b$. Donc $z_{B'} = az_B + b$ et $z_{A'} = az_A + b$, puis $z_{B'} - z_{A'} = az_B - az_A = a(z_B - z_A)$ qui donne le résultat cherché en divisant par $z_B - z_A$ qui est non nul car $A \neq B$.

On peut ainsi calculer directement le coefficient a.

Exercices 15 et 16

Comparer les triangles $\Omega MM'$

Dans une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, pour tout point $M \neq \Omega$ on a $\Omega M' = k\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$; on admet que ces 2 conditions font que tous les triangles $\Omega MM'$ sont directement semblables entre eux.

Cette propriété est utilisée pour construire des images ou des antécédents de points dans une similitude directe.

Identifier le centre d'une similitude directe

Dans une similitude directe de rapport k et d'angle θ, si on connaît un point M et son image $M' \neq M$, alors il est facile de montrer que le centre Ω est l'unique point du plan tel que $\Omega M' = k\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$.

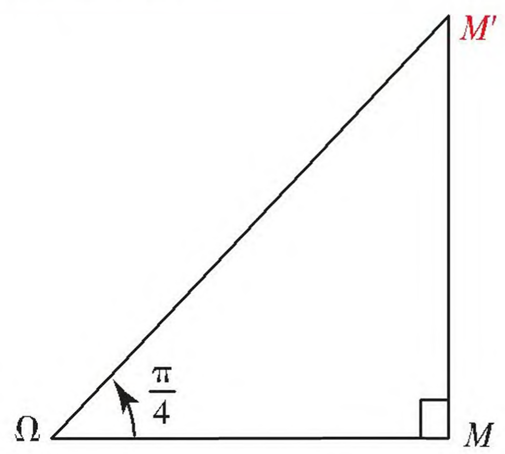
Ce résultat permet d'identifier le centre, notamment quand celui-ci est un point de la figure.

Exercices 2 et 4

Construire l'image d'un point dans des cas particuliers

1. Similitudes de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ (ou $-\frac{\pi}{4}$).

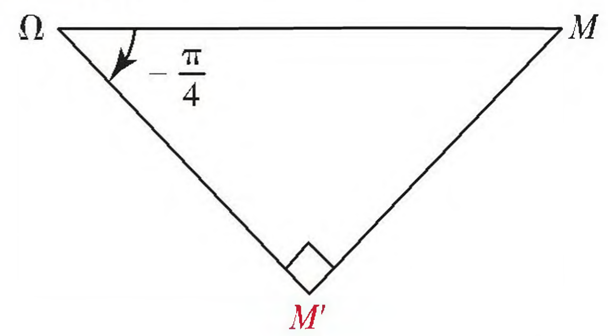
Dans ce cas, pour tout point $M \neq \Omega$, le triangle $\Omega MM'$ est direct (ou indirect), rectangle et isocèle en M ; ce qui permet de construire le point M'.



Le triangle $\Omega MM'$ est, en fait, un demi carré et l'on a bien $\Omega M' = \sqrt{2}\ \Omega M$.

2. Similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ (ou $\frac{\pi}{4}$).

Dans ce cas, pour tout point $M \neq \Omega$, le triangle $\Omega MM'$ est indirect (ou direct), rectangle et isocèle en M' ; ce qui permet de construire le point M'.



Le triangle $\Omega MM'$ est encore un demi carré et l'on a $\Omega M = \sqrt{2}\ \Omega M'$ et donc $\Omega M' = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \Omega M = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \Omega M$.

Exercice 27

4 Similitudes indirectes

Théorème La composée de deux similitudes **indirectes** est une similitude **directe**. La réciproque d'une similitude **indirecte** est une similitude **indirecte**.

RAPPEL
En changeant deux fois de signe, on retrouve le signe d'origine.

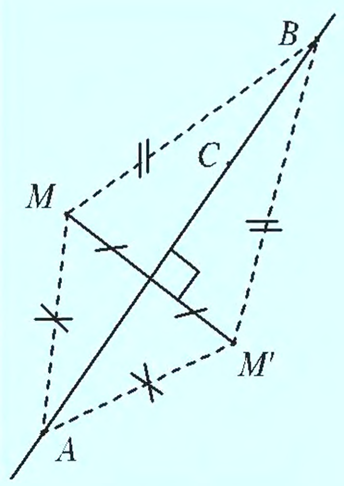
DÉMONSTRATION

- Si on compose deux similitudes qui transforment les angles orientés en leurs opposés, alors les angles orientés sont conservés ; la composée de deux similitudes indirectes est donc une similitude directe.
- Si une similitude transforme les angles orientés en leurs opposés, alors sa réciproque doit faire de même : la réciproque d'une similitude indirecte est donc une similitude indirecte.

Remarque Un raisonnement analogue montre que la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

INFO
En conséquence : si f a trois points fixes non alignés, alors f est l'identité.

Théorème Une similitude f qui a deux points fixes distincts A et B ne peut être que l'identité ou la réflexion d'axe (AB).



DÉMONSTRATION

f est une isométrie, car elle a pour rapport $k = \dfrac{AB}{AB} = 1$. La similitude f peut donc être l'identité.
Si f n'est pas l'identité, elle peut avoir d'autres points fixes mais, pour tout point M tel que $f(M) = M'$ avec $M' \neq M$, on a, puisque f est une isométrie, $AM' = AM$ et $BM' = BM$.
Les points A et B sont équidistants de M et M' ; la droite (AB) est donc la médiatrice de $[MM']$ et les points M et M' sont symétriques par rapport à (AB).
Pour tout autre point fixe C, un raisonnement identique montre que (AC) est la médiatrice de $[MM']$; C appartient donc à (AB).
On peut en conclure que f, si elle n'est pas l'identité, est la réflexion d'axe (AB).

Théorème

Une similitude indirecte g a une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ $(a \neq 0)$.
Réciproquement, pour tous complexes a et b $(a \neq 0)$, $z' = a\bar{z} + b$ décrit une similitude indirecte de rapport $k = |a|$.

DÉMONSTRATION

- Soit A et B deux points distincts de l'axe des réels et leurs images par g, A' et B'.
Il existe une unique similitude **directe** f telle que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.
Comme g est indirecte et f^{-1} est directe, la similitude $s = f^{-1} \circ g$ est indirecte.
Elle vérifie $s(A) = f^{-1} \circ g(A) = f^{-1}(A') = A$ et, de même, $s(B) = B$.
D'après le théorème précédent s est la réflexion d'axe (AB).
De $s = f^{-1} \circ g$, on déduit $f \circ s = f \circ f^{-1} \circ g = g$ car $f \circ f^{-1}$ est l'identité. s a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$ et f a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ $(a \neq 0)$.
On en déduit que $g = f \circ s$ a pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \neq 0$.

RAPPEL
La réflexion par rapport à l'axe des réels a pour écriture complexe :
$z' = \bar{z}$.

- *Réciproquement*, soit A, B et C trois points distincts.
On déduit de $z' = a\bar{z} + b$ que

$$A'B' = |z_{B'} - z_{A'}| = |a(\bar{z}_B - \bar{z}_A)| = |a| \times |\overline{z_B - z_A}| = |a| \times |z_B - z_A| = |a| \times AB.$$

g est donc une similitude de rapport $k = |a|$ car elle multiplie les distances par k.

On déduit de même que $\dfrac{z_{C'} - z_{A'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \dfrac{a(\bar{z}_C - \bar{z}_A)}{a(\bar{z}_B - \bar{z}_A)} = \overline{\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)}$,

ce qui montre, en prenant les arguments des deux extrémités de l'égalité, que $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

g est donc une similitude indirecte car elle transforme un angle orienté en son opposé.

RAPPELS
$|\bar{z}| = |z|$ et, pour tout z non nul, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

INFO
Les déplacements et les antidéplacements constituent donc les isométries du plan.

Définition On appelle **antidéplacements** les isométries indirectes.

EXEMPLE Les réflexions sont des antidéplacements.

Remarque
On déduit facilement des théorèmes précédents qu'une similitude est un antidéplacement si, et seulement si, elle a une écriture complexe de la forme $z' = e^{i\theta}\,\overline{z} + b$.

Théorème
Un antidéplacement qui a au moins un point invariant est une réflexion.

DÉMONSTRATION

Soit g un antidéplacement qui a un point invariant A.
g, indirect, ne peut pas être l'identité, donc il existe un point $M \neq A$ tel que $g(M) = M'$, avec $M' \neq M$; g est une isométrie, donc $AM' = AM$ et A appartient à la médiatrice de $[MM']$.
Soit s la réflexion ayant pour axe la médiatrice de $[MM']$. La composée $s \circ g$ a deux points fixes distincts (A car $s \circ g(A) = s\,(A) = A$ et M car $s \circ g\,(M) = s\,(M') = M$) et elle est directe car c'est la composée de deux similitudes indirectes.
On déduit d'un théorème précédent que $s \circ g$ ne peut être que l'identité.
g est donc la réciproque de s, c'est-à-dire s elle-même car toute réflexion est égale à sa réciproque.
g est donc bien une réflexion.

RAPPEL
Toute réflexion s est telle que $s \circ s = \text{Id}$.

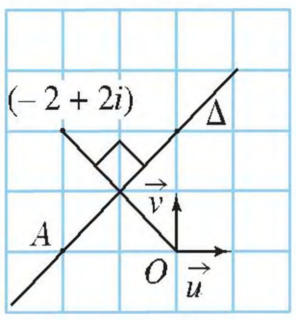
Remarque L'axe de la réflexion est l'ensemble des points invariants de la réflexion.

Le cours en action

Déterminer l'écriture complexe d'une réflexion d'axe donné

ÉNONCÉ **Déterminer l'écriture complexe de la réflexion ayant pour axe la droite Δ d'équation $y = x + 2$.**

SOLUTION Pour déterminer les coefficients a et b de l'écriture complexe, on commence par représenter la droite Δ.



L'image du point O est le point d'affixe $-2 + 2i$. On en déduit que $b = -2 + 2i$, car, pour $z' = 0$, $z' = b$.

L'écriture complexe est alors $z' = a\overline{z} - 2 + 2i$.

On trouve l'image d'un autre point, par exemple celle du point A (–2) qui est invariant. On en déduit que pour $z = -2$ (donc $\overline{z} = -2$) on doit trouver $z' = -2$, ce qui donne en remplaçant dans $z' = a\overline{z} - 2 + 2i$, $-2 = -2a - 2 + 2i$. Donc $a = i$.
L'écriture complexe cherchée est donc $z' = i\overline{z} - 2 + 2i$.

Exercices 20 et 21

Identifier une réflexion à l'aide de ses points fixes

ÉNONCÉ **Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f d'écriture complexe $z' = -i\overline{z} + 1 + i$.**

SOLUTION f est un antidéplacement car $-i = e^{i\theta}$ avec $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Pour savoir si f est, ou non, une réflexion on cherche ses points fixes en résolvant l'équation $z' = z$; mais la présence de $\overline{z}$ nous oblige à poser $z = x + iy$ (x et y réels) et donc $\overline{z} = x - iy$. On trouve ainsi :

$$z' = z \Leftrightarrow x + iy = -i(x - iy) + 1 + i = -y + 1 + i(-x + 1).$$

Deux complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, donc :

$$z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

En effet, le système de deux équations (partie réelle et partie imaginaire) se réduit à une seule équation.
On en déduit que f a pour points invariants les points de la droite d'équation $y = -x + 1$; f est donc la réflexion ayant pour axe cette droite.
On peut remarquer, et ce sera toujours le cas, que l'angle polaire de l'axe de f est égal à $\frac{\theta}{2}$.

Exercices 24 et 25

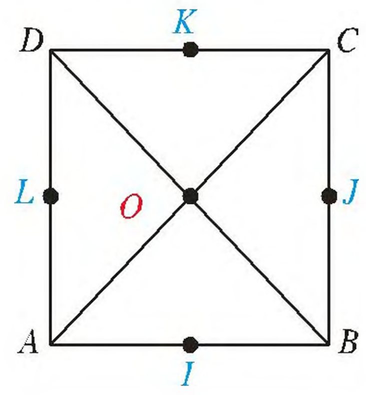
1 Déterminer la nature d'une similitude directe

OBJECTIF Identifier les éléments caractéristiques d'une similitude directe en calculant a.

ÉNONCÉ

Dans le plan complexe, on considère un carré direct $ABCD$ de côté 2 et de centre O.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe f telle que :

1. $f(B) = O$ et $f(I) = L$.
2. $f(B) = D$ et $f(L) = J$.
3. $f(A) = O$ et $f(B) = J$.
4. $f(A) = O$ et $f(L) = J$.
5. $f(A) = A$ et $f(C) = B$.
6. $f(D) = L$ et $f(L) = I$.
7. $f(A) = J$ et $f(C) = L$.



SOLUTION

UNE MÉTHODE Comme $a = k\,e^{i\theta}$, on détermine d'abord le rapport k et l'angle θ de la similitude directe.

1. f a pour rapport $k = \dfrac{OL}{BI} = 1$ et pour angle $\theta = \left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{OL}\right) = 0$; $a = k\,e^{i\theta} = 1$.

f est une translation $(a = 1)$: c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

2. f a pour rapport $k = \dfrac{DJ}{BL} = 1$ et pour angle $\theta = \left(\overrightarrow{BL}, \overrightarrow{DJ}\right) = \pi$; $a = k\,e^{i\theta} = -1$.

f est une symétrie centrale $(a = -1)$: c'est la symétrie de centre O, milieu de $[BD]$ et de $[LJ]$.

3. f a pour rapport $k = \dfrac{OJ}{AB} = \dfrac{1}{2}$ et pour angle $\theta = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OJ}\right) = 0$; $a = k\,e^{i\theta} = \dfrac{1}{2}$.

Dans une homothétie le centre, un point et son image sont alignés.

f est une homothétie (a est un réel différent de 1) : c'est l'homothétie de centre C, intersection des droites (AO) et (BJ), et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

4. f a pour rapport $k = \dfrac{OJ}{AL} = 1$ et pour angle $\theta = \left(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{OJ}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$; $a = k\,e^{i\theta} = -i$.

f est une rotation ($|a| = 1$ et a est différent de 1) d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Le centre d'une rotation est équidistant d'un point et de l'image de ce point.

Son centre est le point I car il est équidistant de A et O d'une part, et de L et J d'autre part.

5. f a pour rapport $k = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et pour angle $\theta = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$; $a = ke^{i\theta} = \dfrac{1-i}{2}$.

f est une similitude directe de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

Son centre est le point A car $f(A) = A$.

6. f a pour rapport $k = \dfrac{LI}{DL} = \sqrt{2}$ et pour angle $\theta = \left(\overrightarrow{DL}, \overrightarrow{LI}\right) = \dfrac{\pi}{4}$; $a = k\,e^{i\theta} = 1 + i$.

f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

On a pu identifier le centre comme étant un point de la figure.

Son centre est le point K car il vérifie les deux conditions $KL = \sqrt{2}KD$ et $\left(\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KL}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

7. f a pour rapport $k = \dfrac{JL}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et pour angle $\theta = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{JL}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$; $a = ke^{i\theta} = -\dfrac{1-i}{2}$.

f est une similitude directe de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.

Son centre est le point O car il vérifie les deux conditions $OJ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}OA$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Le cours, partie 2

2 Étudier algébriquement des similitudes directes

OBJECTIF Caractériser une similitude directe définie par son écriture complexe ou par les images de deux points distincts.

ÉNONCÉ 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe $z' = -2\,i\,z + 3 - i$.

2. Déterminer l'image et l'antécédent de $A(1 - i)$ dans cette similitude.

UNE MÉTHODE Comme $a = k\,e^{i\theta}$, on calcule module et argument de a. L'affixe du centre est solution de l'équation $z' = z$.

SOLUTION

1. La similitude directe a pour rapport $2 = |-2i|$ et pour angle $-\frac{\pi}{2} = \arg(-2i)$.

Pour obtenir l'affixe de son centre, qui est l'unique point invariant, on résout l'équation $z' = z$, soit $z = -2iz + 3 - i \Leftrightarrow (1 + 2i)z = 3 - i$

$\Leftrightarrow z = \frac{3-i}{1+2i} = \frac{(3-i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{1-7i}{5}$, affixe du centre de la similitude directe.

2. Pour $z = 1 - i$, on trouve $z' = -2\,i(1 - i) + 3 - i = 1 - 3\,i$, affixe de l'image de A.

Pour $z' = 1 - i$, on trouve $1 - i = -2iz + 3 - i \Leftrightarrow z = -i$, affixe de l'antécédent de A.

ÉNONCÉ 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soit $A(-1 + 2\,i)$, $B(1 + 4\,i)$, $A'(2 - i)$ et $B'(2 - 5\,i)$.

Déterminer le rapport, l'angle, le centre et l'écriture complexe de la similitude directe qui transforme A en A' et B en B'.

UNE MÉTHODE
- On cherche d'abord le coefficient a de l'écriture complexe : $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$.
- Quand les affixes des points sont simples, on peut s'aider d'une figure.

La diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$.

SOLUTION

• **Solution 1**

On trouve $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$

$= \frac{-4i}{2+2i} = \frac{-4i(2-2i)}{2^2+2^2} = \frac{-8-8i}{8} = -1 - i.$

On en déduit alors que la similitude a pour rapport $\sqrt{2} = |a|$, pour angle $-\frac{3\pi}{4} = \arg(a)$ et que son écriture complexe est de la forme $z' = (-1 - i)\,z + b$.
A' est l'image de A, donc $2 - i = (-1 - i)(-1 + 2\,i) + b$, on en déduit que $b = -1$.

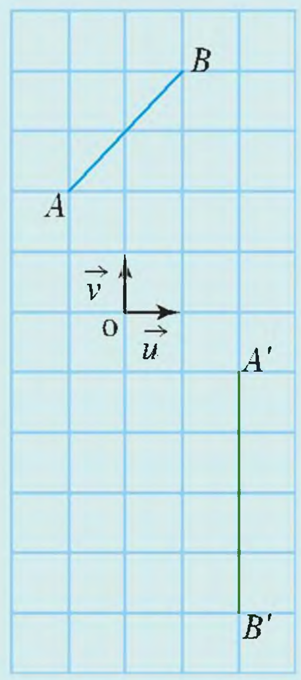
L'écriture complexe de la similitude directe est donc $z' = (-1 - i)\,z - 1$.

Pour trouver le centre, unique point fixe, on résout l'équation $z' = z$:

$z = (-1 - i)z - 1 \Leftrightarrow (2 + i)z = -1$

$\Leftrightarrow z = \frac{-1}{2+i} = \frac{-2+i}{5}$,

affixe du centre de la similitude directe.



• **Solution 2**

$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, en lisant les distances sur la figure.

On lit, toujours sur la figure, $\theta = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = -\frac{3\pi}{4}$.

On en déduit le coefficient $a = k\,e^{i\theta} = -1 - i$.

On termine l'étude comme dans la méthode précédente.

Le cours, parties 1 et 2

3 Étudier géométriquement une similitude directe

OBJECTIF Utiliser des outils géométriques pour étudier des similitudes directes liées à une figure de base : le carré.

ÉNONCÉ

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O et I le milieu de $[AB]$. Faire une figure.

1. Déterminer les éléments caractéristiques (rapport, angle et centre) de la similitude directe s telle que $s(A) = O$ et $s(B) = C$.

2. Déterminer et placer l'image J du point I.

3. Déterminer et placer l'image C' du point C.

4. Déterminer et placer l'antécédent B_0 du point B.

5. Soit M un point quelconque du plan. Décrire la construction de son image M'.

SOLUTION

UNE MÉTHODE : Commencer par rechercher le centre parmi les points de la figure.

1. s a pour rapport $\frac{OC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Son centre est le point D car $DO = \frac{\sqrt{2}}{2}DA$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DO}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2. Une similitude conserve le milieu. Le point I est le milieu de $[AB]$, donc J est le milieu de $[OC]$.

On peut, pour trouver C', utiliser la définition de s mais il est souvent plus efficace d'utiliser la conservation des figures. Voir le cours en action.

3. $ABCD$ est un carré direct, son image par s est donc un carré direct $OCC'D$ ($s(A) = O$, $s(B) = C$ et $s(D) = D$ car D est le centre de s).

C' est alors clairement le symétrique de O par rapport à (DC).

Penser à utiliser s^{-1}, qui est généralement simple, pour construire l'antécédent d'un point.

4. B_0 est l'image de B par la similitude directe s^{-1} qui a pour centre D, pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle $-\frac{\pi}{4}$.

O est le milieu de $[BD]$ et $s^{-1}(O) = A$.

A est donc le milieu de $[DB_0]$ et B_0 est le symétrique de D par rapport à A.

Les triangles DAO et DBC sont directement semblables à DMM'.

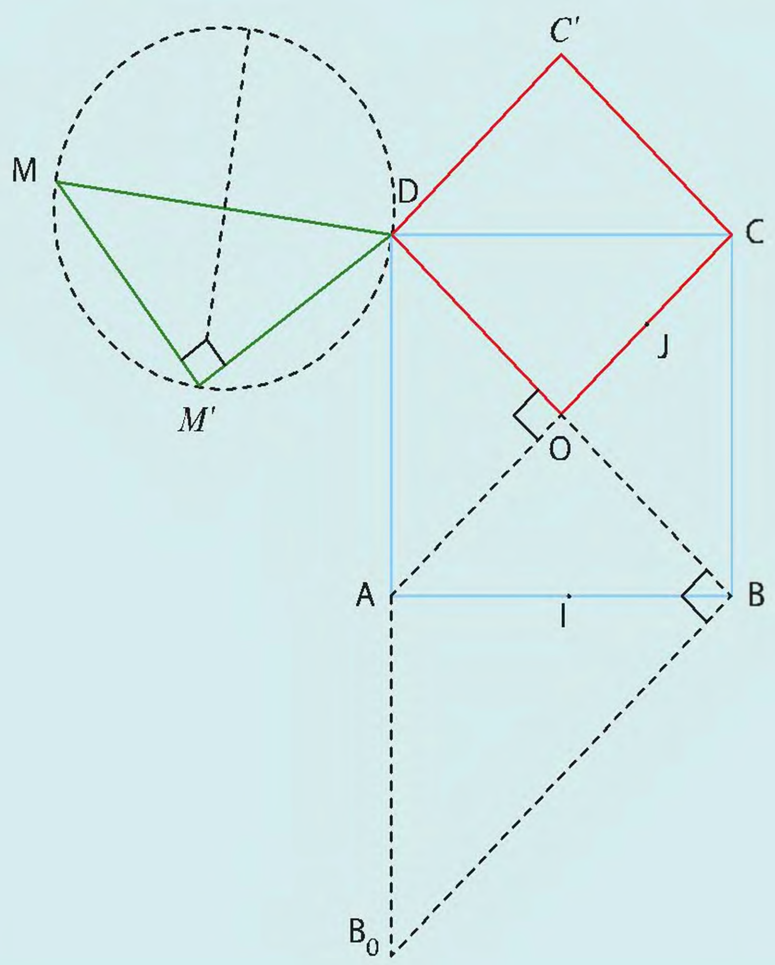
5. Tous les triangles DMM' sont directement semblables entre eux : le triangle DMM' est donc direct, rectangle et isocèle en M'.

M' est donc à l'intersection du cercle de diamètre $[DM]$ (DMM' est rectangle en M') et de la médiatrice de $[DM]$ (DMM' est isocèle en M').

Ce cercle et la médiatrice se coupent en deux points.

DMM' est direct donc M' est celui de ces deux points qui vérifie $\left(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DM'}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Voir le cours en action : cette similitude est d'un type très courant et l'on retrouve souvent cette construction.



Le cours, partie 3

4 Déterminer le centre d'une similitude directe

OBJECTIF Déterminer le centre de la similitude directe géométriquement, puis algébriquement.

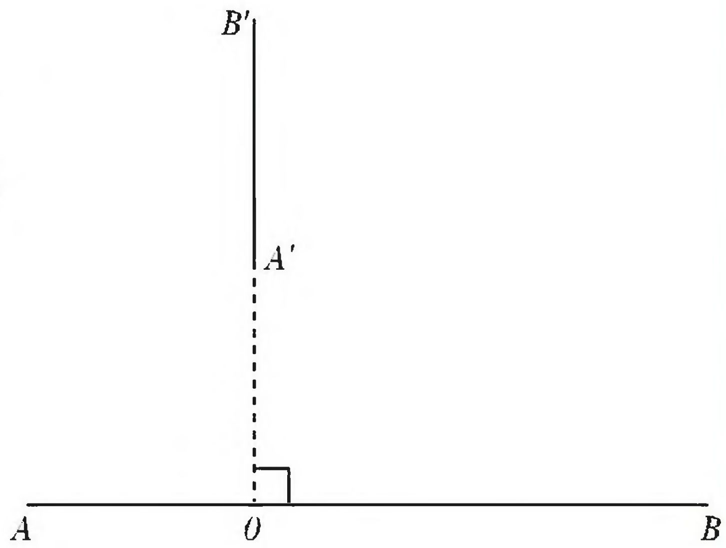
ÉNONCÉ

Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires et se coupent en O ; de plus $AB = 3$ et $A'B' = OA = OA' = 1$.

1. Justifier l'existence d'une unique similitude directe s transformant A en A' et B en B'.

2. a. Déterminer le rapport et l'angle de s.
b. Soit Ω le centre de s. Construire Ω.

3. On se place dans le repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où A' a pour affixe i.
a. Déterminer l'écriture complexe de s.
b. En déduire l'affixe du centre Ω de s.



SOLUTION

UNE MÉTHODE Penser aux propriétés du triangle rectangle quand l'angle de la similitude est droit.

1. $A \neq A'$ et $B \neq B'$, donc il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

2. a. Le rapport de s vaut $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{3}$.

L'angle de s vaut $\theta = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = +\frac{\pi}{2}$.

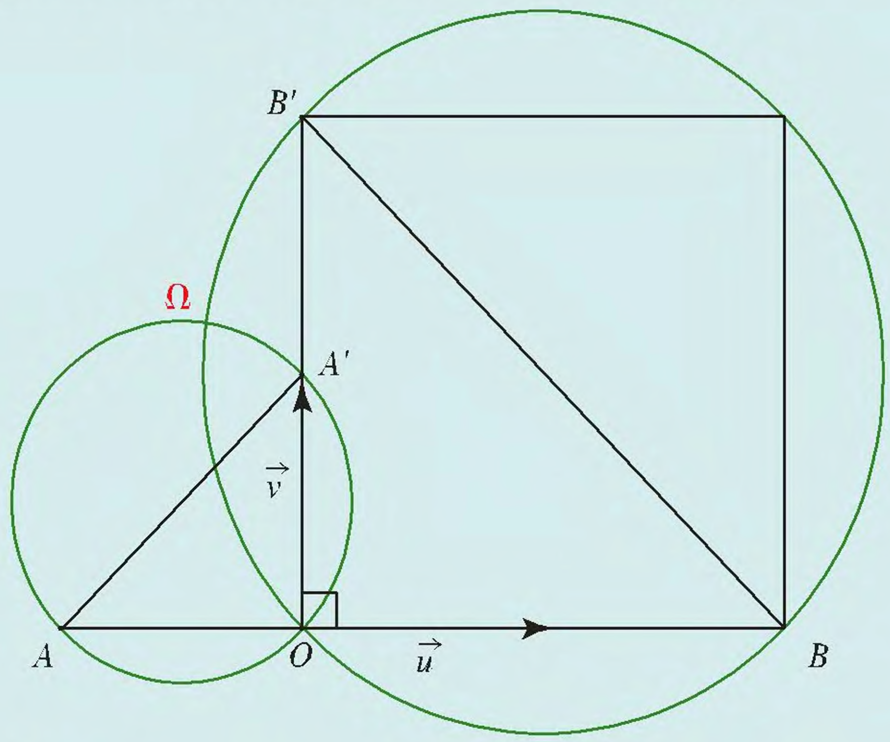
b. L'angle de s est égal à $+\frac{\pi}{2}$ donc $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}\right) = +\frac{\pi}{2}$.

Les triangles $\Omega AA'$ et $\Omega BB'$ sont donc rectangles en Ω : le centre Ω appartient donc aux cercles de diamètres $[AA']$ et $[BB']$.

Le point O, qui appartient aux deux cercles, ne peut pas convenir car $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = -\frac{\pi}{2} \neq \theta$.

Ω est donc l'autre point d'intersection des deux cercles (voir figure).

L'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit à un triangle rectangle.



On utilise la méthode vue à l'exercice résolu 2.

3. a. $a = k\,e^{i\theta} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}i$; s transforme $A\,(-1)$ en $A'\,(i)$, donc $i = \frac{1}{3}i \times (-1) + b$ et $b = i + \frac{1}{3}i = \frac{4}{3}i$.

Finalement, $z' = \frac{1}{3}iz + \frac{4}{3}i = \frac{iz + 4i}{3}$ est l'écriture complexe de s.

b. Ω est l'unique point fixe de s. On résout $z' = z$:

$$3z = iz + 4i \Leftrightarrow (3 - i)z = 4i$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{4i}{3 - i}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{4i(3 + i)}{3^2 + (-1)^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-4 + 12i}{10} \quad \Leftrightarrow z = \frac{-2 + 6i}{5}$$

; Ω a pour affixe $\frac{-4 + 12i}{10} = -0{,}4 + 1{,}2i$.

Le résultat trouvé est cohérent avec la figure.

Le cours, parties 2 et 3

5 Composer des similitudes directes

OBJECTIF **Avec des composées de similitudes directes, montrer l'existence d'un point remarquable du triangle.**

ÉNONCÉ

Soit un triangle direct ABC. On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés $BCFG$, $ACDE$ et $ABHI$, de centres respectifs O_1, O_2 et O_3.

1. Soit s_1 la similitude directe telle que $s_1(C) = D$ et $s_1(O_2) = E$.
Déterminer ses éléments caractéristiques et en déduire $s_1(O_3)$.

2. Soit s_2 la similitude directe de centre C, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Déterminer $s_2(D)$ et $s_2(B)$.

3. On considère la transformation $s_2 \circ s_1$.
Montrer qu'elle est une rotation et déterminer son angle.
En déduire que la droite (CO_3) est perpendiculaire à la droite (O_2O_1).

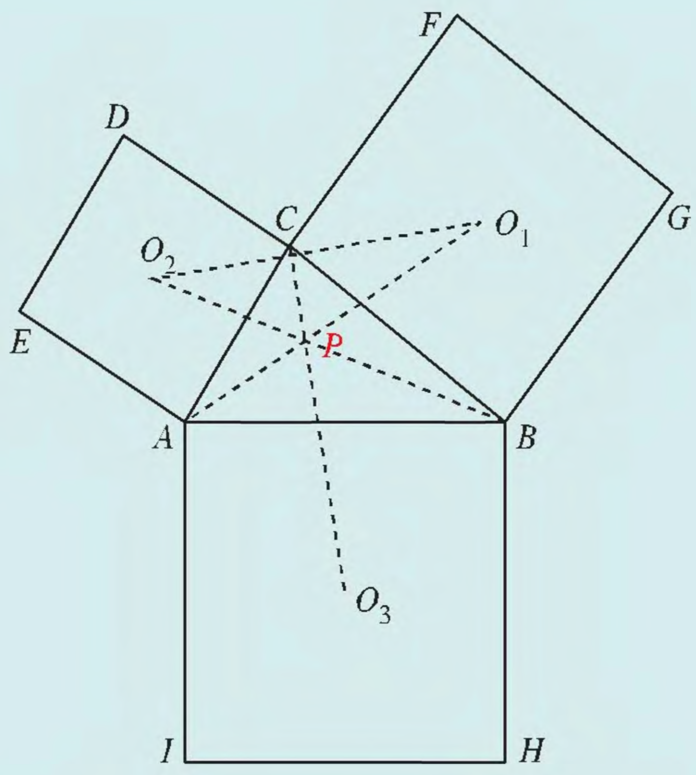
4. On admet que des démonstrations similaires permettent d'établir que (AO_1) est perpendiculaire à (O_2O_3) et que (BO_2) est perpendiculaire à (O_1O_3).
Montrer alors que les 3 droites (AO_1), (BO_2) et (CO_3) sont concourantes en un point P.

Ce point est appelé point de Vecten du triangle.

SOLUTION

UNE MÉTHODE Identifier les similitudes s_1 et s_2 comme des modèles très employés, signalés par le cours en action.

1. s_1 a pour rapport $k_1 = \frac{DE}{CO_2} = \sqrt{2}$, pour angle $\theta_1 = \left(\overrightarrow{CO_2}, \overrightarrow{DE}\right) = \frac{\pi}{4}$ et pour centre A,
car $AD = AC\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré) et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{4}$.
D'autre part, AO_3B est direct, rectangle et isocèle en O_3 donc $AB = \sqrt{2}\,AO_3$ et $\left(\overrightarrow{AO_3}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{4}$.
Alors, $s_1(O_3) = B$.



2. De même $s_2(D) = O_2$ et $s_2(B) = O_1$ car les triangles CDO_2 et CBO_1 sont directs, rectangles et isocèles respectivement en O_2 et O_1.

3. $s_2 \circ s_1$ est une similitude directe (composée de 2 similitudes directes).
Son rapport est $k_1k_2 = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ donc c'est une isométrie directe (un déplacement).
Son angle est $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; $s_2 \circ s_1$ est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
$s_2 \circ s_1(C) = s_2(D) = O_2$ et $s_2 \circ s_1(O_3) = s_2(B) = O_1$; donc la droite (O_2O_1) est l'image de (CO_3) dans une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Ces deux droites sont bien perpendiculaires.

Voir le théorème sur la composition des similitudes directes.

4. Si l'on considère le triangle $O_1O_2O_3$, les 3 droites (AO_1), (BO_2) et (CO_3) sont les 3 hauteurs de ce triangle (elles passent par un sommet et sont perpendiculaires au côté opposé).
Elles sont concourantes en un point P qui est l'orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$.

Le cours, partie 3

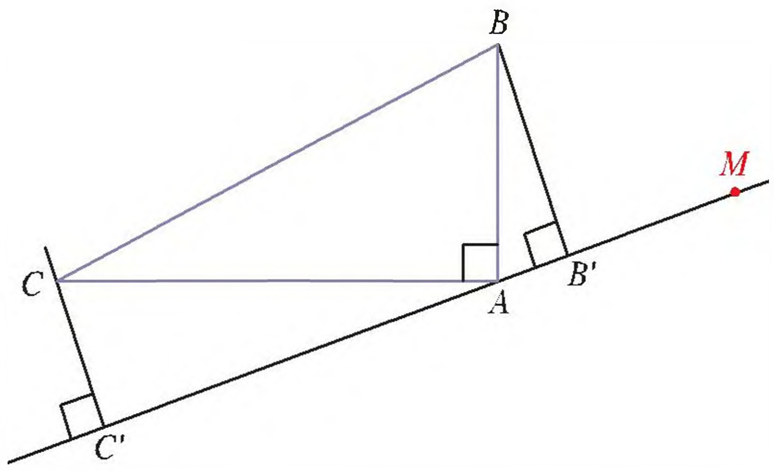
TD 1 Quel est ce point fixe ? TICE

OBJECTIF Identifier un point fixe.

Soit ABC un triangle direct rectangle en A et M un point quelconque du plan, distinct de A. On appelle B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (AM).

A Expérimentation

1. Représenter la figure ci-dessous à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, le point M étant un point libre du plan, les points B' et C' étant les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur (AM).



2. Représenter le cercle de diamètre $[B'C']$. En faisant varier le point M, observer que ce cercle passe par un point fixe et que ce point fixe appartient au segment $[BC]$.

3. Créer les points d'intersection du cercle de diamètre $[B'C']$ avec (BC).
Nommer H celui de ces points qui est fixe. Créer le segment $[AH]$.

4. Que semble être le point H pour le triangle ABC ?

B Démonstration

1. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).
On appelle f la similitude directe de centre H qui transforme C en A.

a. Quel est l'angle de f ?

b. Exprimer le rapport de f comme un rapport de distances.

2. a. Montrer que les triangles HCA et HAB sont semblables.

b. En déduire que $f(A) = B$.

3. a. Quelle est l'image de la droite (AM) par f ? Quelle est l'image de la droite (CC') par f ?

b. En déduire l'image de C' par f.

Ce sujet est aussi traité par l'exercice n° 37.

4. En conclure que le cercle de diamètre $[B'C']$ passe bien par H.

TD 2 Deux cercles et une similitude TICE

OBJECTIF Étudier une similitude directe transformant un cercle en un autre.

Deux cercles Γ et Γ', de centres O et O', se coupent en deux points distincts A et B.
f est la similitude directe de centre A qui transforme O en O'.
La tangente en B au cercle Γ' recoupe le cercle Γ en T.
M est un point du cercle Γ situé sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{TB}$ qui ne contient pas A et M' est son image par f.

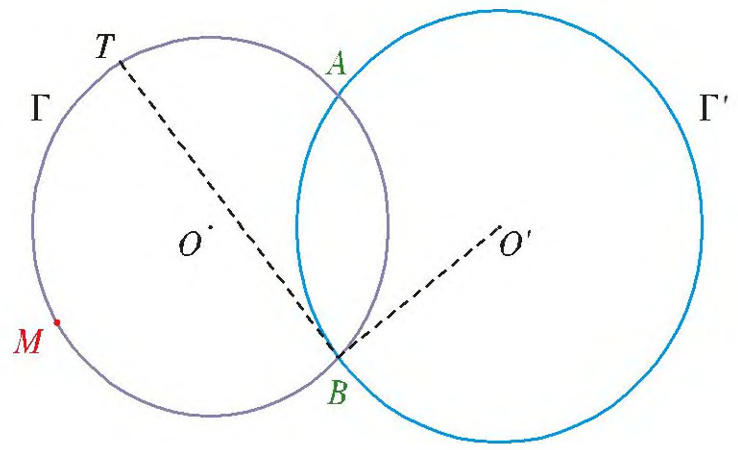
A Expérimentation

Consulter la page TICE en fin de chapitre pour représenter M'.

1. Représenter la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, le point M étant créé comme un point libre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{TB}$.

2. Représenter le point $M' = f(M)$ et tracer le segment $[MM']$.

En faisant varier le point M, conjecturer une construction simple du point M' quand M décrit l'arc de cercle $\overset{\frown}{TB}$.



B Démonstration

1. Montrer que f transforme Γ en Γ'.

2. Soit P et P' les points de Γ et Γ' diamétralement opposés à A.
Montrer que $P' = f(P)$ et que P, B et P' sont alignés.

3. Montrer que $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BP}\right) = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right)$ et que $\left(\overrightarrow{BP'}, \overrightarrow{BM'}\right) = \left(\overrightarrow{AP'}, \overrightarrow{AM'}\right)$, quand ces angles orientés sont définis.

> Une similitude directe conserve les angles orientés.

4. Pour $M \neq B$ et $M' \neq B$, montrer que $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right) = \left(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BP'}\right)$ en utilisant la relation de Chasles. En déduire que les points M, B et M' sont alignés.

TD 3 De bonne composition... TICE

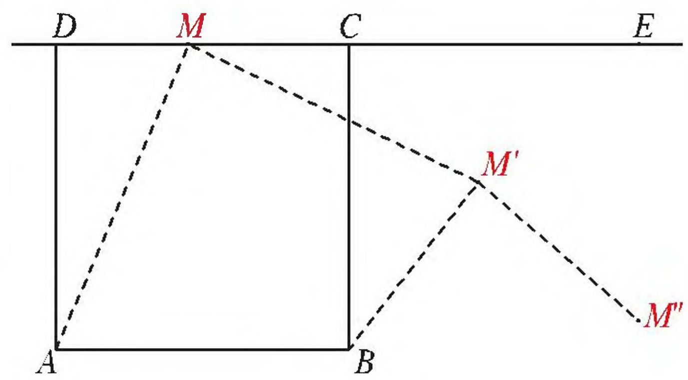
OBJECTIF Observer et étudier la composée de deux similitudes directes.

$ABCD$ est un carré direct et E le symétrique de D par rapport à C.

f est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

g est la similitude directe de centre B, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Si M est un point de la droite (CD), on note $M' = f(M)$ et $M'' = g(M')$.



A Expérimentation

> Consulter la page TICE en fin de chapitre pour représenter M' et M''.

1. Représenter la figure ci-dessus à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, le point M étant un point libre de la droite (CD).

2. En faisant varier le point M sur la droite (CD), conjecturer le lieu décrit par M''.

3. Construire les cercles de diamètres $[AD]$ et $[MM'']$. Qu'observe-t-on sur ces cercles quand M se déplace sur la droite (CD) ? Proposer une explication.

B Démonstration

1. On note $s = g \circ f$. Donner la nature, le rapport et l'angle de s.
Déterminer $s(A)$ et $s(D)$.

2. En déduire le lieu décrit par M'' quand M décrit la droite (CD).

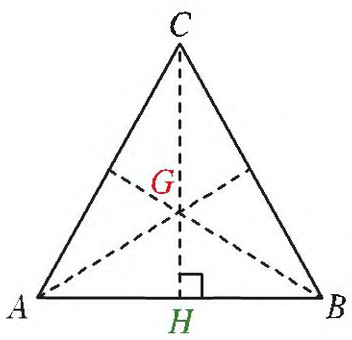
3. On note Ω centre de s. Expliquer l'observation faite sur les cercles de diamètres $[AD]$ et $[MM'']$. Proposer une construction de Ω.

Application

Similitudes directes et géométrie

Cours partie 2

1 Soit ABC un triangle équilatéral direct de côté a, le point H est le milieu de $[AB]$ et G son centre de gravité.



1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A qui transforme C en H.

2. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre G qui transforme H en B.

3. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe qui transforme A en H et H en C.

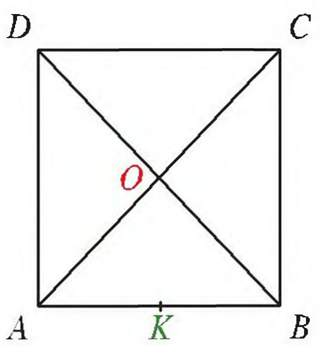
2 Soit ABC un triangle équilatéral direct de côté a, le point H est le milieu de $[AB]$ et G son centre de gravité.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A qui transforme C en G.

2. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe qui transforme A en C et C en H.

3. Déterminer le rapport, l'angle et le centre de la similitude directe qui transforme A en B et H en A.

www. **3** Soit $ABCD$ un carré direct de côté a et de centre O. On appelle K le milieu de $[AB]$.



1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A qui transforme O en B.

2. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre O qui transforme C en K.

3. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe qui transforme A en B et O en C.

4 Soit $ABCD$ un carré direct de côté a et de centre O. On appelle K le milieu de $[AB]$.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe qui transforme A en C et O en D.

2. Déterminer le rapport, l'angle et le centre de la similitude directe qui transforme C en D et O en A.

5 Soit $ABCD$ un carré direct.

1. Construire son image par la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. Construire son image par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

6 Soit $ABCD$ un carré direct de centre O. On appelle K le milieu de $[AB]$.

1. Quelle est l'image du point C par la similitude directe de centre A qui transforme O en B ?

2. Quelle est l'image de la droite (OD) ?

3. Construire l'image du point B.

En déduire l'image du point K.

7 Soit ABC un triangle équilatéral direct et H le milieu de $[AB]$.

1. Construire l'image du triangle ABC par la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

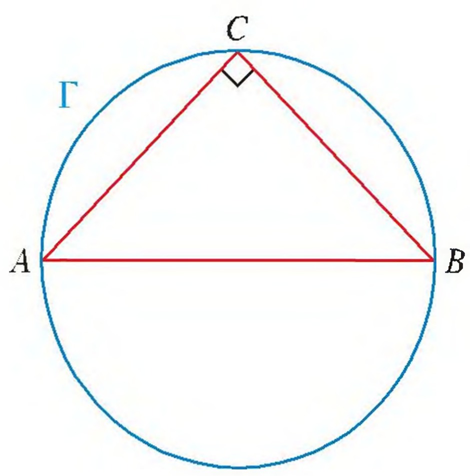
2. Construire son image par la similitude directe de centre H qui transforme A en C.

www. **8** Soit ABC un triangle équilatéral direct et H le milieu de $[AB]$.

1. Construire l'image du point H par la similitude directe qui transforme B en C et A en H.

2. Construire l'image de la droite (BC) par la similitude directe de centre A qui transforme C en H.

9 Soit ABC un triangle direct, rectangle et isocèle en C. Γ est le cercle circonscrit au triangle ABC.



1. Construire l'image de Γ par la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

2. Construire l'image de Γ par la similitude directe de centre B qui transforme C en A.

10 Soit $ABCD$ un carré direct de côté 3. P est le barycentre de $(A\,;1)$ et $(B\,;2)$, Q celui de $(B\,;2)$ et $(C\,;1)$.

1. Construire les points P et Q.

2. Construire les images de P, C et Q par la similitude directe s de centre A qui transforme B en C.

3. Le point G est le barycentre de $(A\,;1)$, $(B\,;2)$ et $(C\,;1)$. Construire G, puis son image par la similitude s.

Similitudes directes : écriture complexe

Cours partie 2

Pour les exercices utilisant les nombres complexes, le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

11 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe dont on donne l'écriture complexe. Calculer l'image et l'antécédent du point A.

1. $z' = z + 3 - 2i$, $A\,(1 - i)$.
2. $z' = -iz - 2i$, $A\,(1 - i)$.
3. $z' = (-1 + i)z + 3 - 6i$, $A\,(1 - i)$.
4. $z' = (1 + i\sqrt{3})\,z$, $A\left(-i\sqrt{3}\right)$.
5. $z' = -z + 2i$, $A\,(1 - i)$.

12 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent.

1. $z' = -3z + 4 + 8i$, $A\,(1 - i)$.
2. $z' = 3iz + 3 - i$, $A\,(1 - i)$.
3. $z' = -i\sqrt{2}z + 3i$, $A\left(\sqrt{2} - i\right)$.
4. $z' = -\frac{1+i}{2}z - \frac{5}{2}$, $A\,(-\frac{3}{2})$.
5. $z' = \frac{(3+i\sqrt{3})z + 2 - 2i\sqrt{3}}{4}$, $A\,(0)$.

13 Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

1. $\Omega\,(-3 + 6i)$, $k = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.
2. $\Omega\,(-i)$, $k = 2$, $\theta = \pi$.
3. $\Omega\,(2 - 2i)$, $k = \sqrt{2}$, $\theta = -\frac{3\pi}{4}$.
4. $\Omega\,(-1 - i)$, $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

14 Même question qu'à l'exercice précédent.

1. $\Omega\,(i)$, $k = 2$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$.
2. $\Omega\,(-3i)$, $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$.
3. $\Omega\,(-1)$, $k = 1$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.
4. $\Omega\,(1 + 3i)$, $k = 2\sqrt{3}$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
5. $\Omega\,(2)$, $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$.

15 Déterminer l'écriture complexe, le rapport et l'angle de la similitude directe transformant A en A' et B en B'. En déduire l'affixe de son centre quand celui-ci existe.

1. $A\,(4 + 2i)$ $B\,(4)$ $A'\,(-3 + 6i)$ $B'\,(1 + 6i)$.
2. $A\,(2)$ $B\,(-2 + 2i)$ $A'\,(-1 + 2i)$ $B'\,(-2)$.
3. $A\,(4 + 2i)$ $B\,(0)$ $A'\,(3 - i)$ $B'\,(-1 - 3i)$.

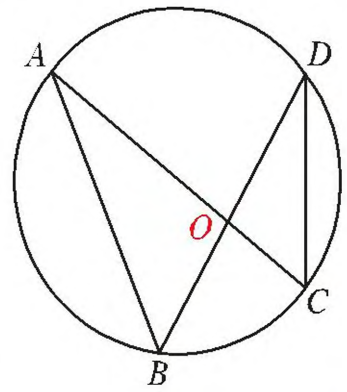
16 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent.

1. $A\,(3 - i)$ $B\,(2 - 2i)$ $A'\,(-3 + 6i)$ $B'\,(1 + 6i)$.
2. $A\,(4 + 2i)$ $B\,(3)$ $A'\,(3 - i)$ $B'\,(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i)$.
3. $A\,(-2 - i)$ $B\,(i)$ $A'\,(-1)$ $B'\,(-1 + i)$.
4. $A\,(5 - i\sqrt{3})$ $B\,(6)$ $A'\,(6)$ $B'\,(6 - i\sqrt{3})$.

Similitudes indirectes

Cours partie 4

17 A, B, C et D sont quatre points cocycliques. Les droites (AC) et (BD) se coupent en O ; $AB = 5$ et $CD = 3$.



Montrer qu'il existe une similitude indirecte qui transforme OAB en ODC et donner son rapport.

18 Déterminer l'image et l'antécédent du point $A\,(1 + i)$ dans la similitude indirecte dont on donne l'écriture complexe.

1. $z' = -\bar{z} + 1$ **2.** $z' = (1 + i)\,\bar{z} + i$
3. $z' = i\bar{z}$ **4.** $z' = -i\bar{z} + 1$

19 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent.

1. $z' = -i\bar{z} - 2i$ **2.** $z' = -2i\bar{z} - 2$
3. $z' = 2i\bar{z} + 1 - i$ **4.** $z' = 3\bar{z} - 1 + 3i$

20 Déterminer l'écriture complexe de la réflexion ayant pour axe la droite d'équation.

1. $y = 0$ **2.** $x = -3$
3. $y = x$ **4.** $y = -x - 1$

21 Même question qu'à l'exercice précédent.

1. $x = 0$ **2.** $y = 2$
3. $y = -x$ **4.** $y = x + 4$
5. $y = x + p$ ($p \neq 0$, réel) **6.** $y = mx$ ($m \neq 0$, réel)

22

ÉNONCÉ

Soit les points $A\,(4 + 2i)$, $B\,(4)$, $A'\,(-3 + 6i)$ et $B'\,(1 + 6i)$.

Déterminer l'écriture complexe d'une similitude indirecte transformant A en A' et B en B'.

AIDE ET MÉTHODE

- Déterminer les coefficients a et b de $z' = a\,\bar{z} + b$

SOLUTION

De $z' = a\,\bar{z} + b$, on tire : $-3 + 6i = a\,(4 - 2i) + b$ (A' est l'image de A) et $1 + 6i = 4a + b$ (B' est l'image de B).

En faisant la différence des deux équations, on trouve : $-4 = -2ia$, donc $a = -2i$.

Enfin $b = 1 + 6i - 4\,a = 1 + 14i$.
On vérifie que

$$-3 + 6i = a(4 - 2i) + b.$$

La similitude indirecte transformant A en A' et B en B' a pour écriture complexe:

$$z' = -2i\,\bar{z} + 1 + 14i$$

23 Déterminer l'écriture complexe d'une similitude indirecte transformant A en A' et B en B'.

1. $A\,(3-\mathrm{i})$ $B\,(3+\mathrm{i})$ $A'\,(-1+2\mathrm{i})$ $B'\,(-2)$.

2. $A\,(4+2\mathrm{i})$ $B\,(0)$ $A'\,(3-\mathrm{i})$ $B'\,(-1-3\mathrm{i})$

3. $A\,(3-\mathrm{i})$ $B\,(2-2\mathrm{i})$ $A'\,(-3+6\mathrm{i})$ $B'\,(1+6\mathrm{i})$

www. **24** Rechercher les points fixes éventuels de la similitude indirecte dont on donne l'écriture complexe et, quand il s'agit d'une réflexion, préciser son axe.

1. $z' = \bar{z} + 1$ **2.** $z' = (1+\mathrm{i})\bar{z} + \mathrm{i}$

3. $z' = \mathrm{i}\bar{z} + 2 - 2\mathrm{i}$ **4.** $z' = \mathrm{i}\bar{z} + 2$

25 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent.

1. $z' = -\bar{z} - 4$ **2.** $z' = -\mathrm{i}\bar{z} - 1 + \mathrm{i}$

3. $z' = -2\mathrm{i}\bar{z} + 1 + \mathrm{i}$ **4.** $z' = 3\bar{z} - 2 + 4\mathrm{i}$

Composition de similitudes

Cours parties 1 à 4

26 **1.** f et g étant deux similitudes dont on donne l'écriture complexe, déterminer les écritures complexes des composées $f \circ g$ et $g \circ f$ et vérifier ainsi leurs natures (directe ou indirecte) ainsi que leurs rapports.

a. $f : z' = 2z + \mathrm{i}$ $g : z' = \mathrm{i}\bar{z}$.

b. $f : z' = 2z + \mathrm{i}$ $g : z' = \mathrm{i}z - 1 - \mathrm{i}$.

c. $f : z' = 2\bar{z} + \mathrm{i}$ $g : z' = -\bar{z} + 1$.

d. $f : z' = 2z + \mathrm{i}$ $g : z' = (1+\mathrm{i})\,z - 2 + \mathrm{i}$.

2. Pourquoi a-t-on $f \circ g = g \circ f$ au **1.b** ?

27 En utilisant les écritures complexes des similitudes, démontrer que :

1. La composée de deux symétries centrales est une translation.

2. La composée de deux réflexions est une translation ou une rotation.

3. La composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

4. La composée de deux homothéties est une translation ou une homothétie.

28 VRAI OU FAUX ?

Valider ou infirmer les affirmations suivantes :

1. Quand on compose deux déplacements, on obtient un déplacement.

2. Quand on compose deux antidéplacements, on obtient un antidéplacement.

3. Quand on compose une similitude de rapport k avec une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$, on obtient un déplacement.

4. Quand on compose une similitude directe de rapport k avec une similitude directe de rapport $\dfrac{1}{k}$, on obtient un déplacement.

5. L'identité et les symétries centrales sont les seules similitudes directes f égales à leur réciproque, c'est-à-dire qu'elles sont les seules telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$.

Approfondissement

Pour les exercices utilisant les nombres complexes, le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

Similitudes directes

Cours parties 1 à 3

29 Dans le plan complexe, on considère les points $A\,(3)$, $B\,(2+\mathrm{i})$, $C\,(3+3\mathrm{i})$, $D\,(2+3\mathrm{i})$ et $E\,(1+3\mathrm{i})$.

Les droites (AB) et (CD) se coupent en $K\,(3\mathrm{i})$.

1. On appelle f la similitude directe qui transforme A en C et B en D.

a. Déterminer le rapport et l'angle de f.

b. Montrer que K est le centre de f.

2. On appelle g la similitude directe qui transforme A en C et B en E.

a. Déterminer le rapport et l'angle de g.

b. Montrer que O est le centre de g.

3. On appelle h la similitude directe qui transforme A en C et B en K.

a. Déterminer le rapport et l'angle de h.

b. Déterminer l'écriture complexe de h.

c. En déduire l'affixe de Ω, centre de h.

30 Dans le plan complexe, on considère les points $A\,(4-\mathrm{i})$, $B\,(2+\mathrm{i})$, $C\,(3+3\mathrm{i})$ et $D\,(1+3\mathrm{i})$.

Les droites (AB) et (CD) se coupent en $K\,(3\mathrm{i})$.

Faire une figure que l'on complétera.

On appelle f la similitude directe qui transforme A en C et B en D.

1. Déterminer le rapport k et l'angle θ de f.

2. Montrer que $\left(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KC}\right) = \left(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KD}\right) = \theta$, mais que K n'est pas le centre de f.

3. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. En déduire l'affixe de Ω, centre de f.
Placer Ω sur la figure.

5. a. Montrer que le triangle OBD est rectangle et isocèle en B. Construire son cercle circonscrit.

b. Ce cercle passe par K et Ω. Pouvait-on le prévoir ?

31 On considère la similitude directe f d'écriture complexe $z' = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 + \mathrm{i}$, et le point $A\,(2+2\mathrm{i})$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
On note Ω son centre.

2. Déterminer l'affixe de $A' = f\,(A)$.

3. Déterminer l'affixe de A_0, antécédent de A par f.

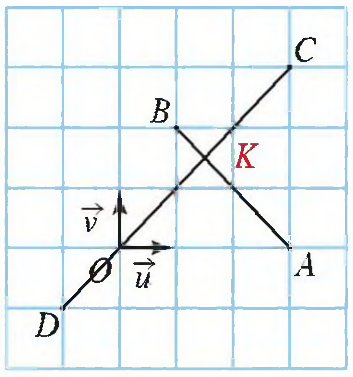
4. Soit M un point quelconque du plan complexe et M' son image par f.

a. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

b. Décrire une construction de M' connaissant M.

5. Déterminer l'écriture complexe de f^{-1}, transformation réciproque de f.

32 Dans le plan complexe, on considère les points A (3), B (1 + 2i), C (3 + 3i) et D (–1 – i).
Les droites (AB) et (CD) se coupent en K.



On appelle f la similitude directe qui transforme A en C et B en D.

A. Étude géométrique de *f*

1. Déterminer le rapport et l'angle de f.
2. Soit Ω le centre de f. Montrer que Ω appartient aux cercles de diamètres [AC] et [BD].
3. Montrer que K appartient aussi à ces deux cercles et qu'il n'est pas le centre de f.
4. Construire alors Ω.

AIDE On pourra utiliser des résultats lus sur la figure.

B. Utilisation des nombres complexes

1. Déterminer l'écriture complexe de f.
2. En déduire l'affixe de Ω.
3. Déterminer l'affixe de $O' = f(O)$ et celle de l'antécédent de O.
4. En déduire que les points K, Ω et O' sont alignés.

33 ★ Dans le plan complexe, on considère les points

A (1 + i) et B (– 2 + i).

On appelle f la similitude directe de centre O qui transforme A en B.
Faire une figure que l'on complétera en prenant pour unité graphique 2 cm.
1. Soit Γ le cercle de centre A passant par O.
Déterminer son image Γ' par f. Représenter Γ et Γ'.
2. Montrer que Γ et Γ' se coupent en K, symétrique de O par rapport à (AB). Donner l'affixe de K.
3. Déterminer l'écriture complexe de f et donner son rapport.
4. Soit le point C d'affixe 2.
a. Montrer que C appartient à Γ et déterminer l'affixe de $D = f(C)$. Monter que D appartient à Γ'.
b. Montrer que les points C, K et D sont alignés.
5. Soit le point $H = f(K)$.
a. Déterminer son affixe. Monter que H appartient à Γ'.
b. Montrer que le triangle AKH est rectangle en K.
c. Que représente la droite (KH) pour le cercle Γ ?
6. Soit le point P, antécédent de K par f.
a. Déterminer son affixe. Monter que P appartient à Γ.
b. Montrer que le triangle BKP est rectangle en K.
c. Que représente la droite (KP) pour le cercle Γ' ?

34 ★ Dans le plan complexe, on considère les points

A (2 + 4i), B (– 4 – 2i) et C (2 – 4i).

Les points I, J et K sont les milieux de [BC], [CA] et [AB].
Faire une figure que l'on complétera.
On appelle f la similitude directe d'écriture complexe

$$z' = -\frac{1+i}{2}z + 1 - i.$$

1. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
2. Déterminer les affixes des points I, J et K.
3. Déterminer les affixes des images A', B' et C' de A, B et C par f.
4. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s qui transforme I en A' et J en B'.
5. Déterminer $s(K)$ et en déduire que les triangles IJK et $A'B'C'$ sont directement semblables.
6. Quelle est la nature des triangles OIA', OJB' et OKC' ?
7. Montrer, en considérant la similitude $g = f^{-1} \circ s$, que les triangles IJK et ABC sont directement semblables.
8. Déterminer l'angle et le rapport de g.
En déduire la nature de g.
9. Que représente le centre de g pour le triangle ABC ?

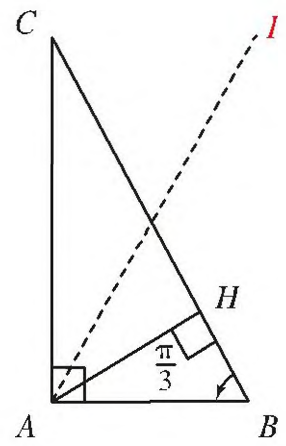
35 Dans le plan complexe, on considère les points A (6) et B (3i). f est la transformation du plan qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' telle que $z' = -\frac{1}{2}iz + 3i$.
1. Montrer que f est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω, le rapport et l'angle.
2. Déterminer $f(A)$ et $f(O)$.
3. Montrer que Ω appartient aux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de diamètres respectifs [OA] et [OB].
4. Montrer que Ω est le projeté orthogonal de O sur (AB).
5. Montrer que $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$.
6. Faire une figure représentant A, B, Ω, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

36 ★ $ABCD$ est un rectangle direct tel que $AB = 2AD$.
Le point J est le milieu de [AB], K celui de [AD]. Soit f la similitude directe telle que $f(A) = B$ et $f(D) = A$.
1. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
Faire une figure et construire le centre Ω de f.
2. Quelle est la nature du triangle ΩKJ ?
Comparer les distances ΩJ et ΩK.
3. Construire, en justifiant la construction, $C' = f(C)$.
Pourquoi C' appartient-il à (AD) ?

37 ★ Soit OAB un triangle direct rectangle en O et Δ une droite variable passant par O. On note A' et B' les projetés orthogonaux de A et B sur Δ.
1. Faire une figure.
2. Soit s la similitude directe transformant O en A et B en O.
Déterminer l'angle de s.
3. Montrer que le centre de s est le point K, projeté orthogonal de O sur (AB).
4. Soit Δ' la droite orthogonale à Δ passant par B.
Déterminer s(Δ') et s(Δ) ; en déduire s (B').
5. Montrer que quand Δ varie (et donc quand Δ' varie), le cercle de diamètre [$A'B'$] passe par un point fixe.

38 ★ **1.** Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe vérifiant $|(1 + i)z + 1 - i| = \sqrt{2}$.
2. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s transformant A(i) en O et O en B (1 – i).
3. Retrouver, à l'aide de s, le résultat de la question **1.**

39 ★ Soit ABC un triangle direct, rectangle en A et tel que $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{3}$. Le point I est le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



s_1 est la similitude directe de centre A qui transforme H en B.
s_2 est la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

1. Montrer que $s_1(C) = I$ et en déduire l'image par s_1 de la droite (BC).

2. Déterminer l'image de la droite (BI) par s_2.

3. Soit M un point de (BI) et $M' = s_2(M)$. On suppose que M et M' sont distincts de I. Montrer que les quatre points A, M, I et M' appartiennent à un même cercle.

40 ★ ABC est un triangle isocèle tel que $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$. Le point I est tel que le triangle CAI est indirect, rectangle et isocèle en C et H est le milieu de $[BC]$.
Faire une figure que l'on complétera ($AB = 5$ cm).
On note r_A la rotation de centre A qui transforme B en C, r_C la rotation de centre C qui transforme A en I et f la transformation composée $r_C \circ r_A$.

1. a. Déterminer $f(A)$ et $f(B)$. Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. On note O son centre.

b. Montrer que $ABOC$ est un losange.

Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On note $C' = s(C)$ et $H' = s(H)$.

2. Donner une mesure de l'angle de s.
Montrer que C' appartient à la droite (OA).

3. Donner l'image par s du segment $[OA]$ et montrer que H' est le milieu de $[OB]$.

4. Montrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à (OB) et en déduire que C' est le centre du cercle circonscrit à OBC.

41 ★ $ABCD$ est un rectangle direct de centre O tel que $AB = 2AD$. Le point J est le milieu de $[AB]$, K celui de $[AD]$.
Faire une figure que l'on complétera.

1. Soit f la similitude directe de centre A transformant B en D. Déterminer le rapport et l'angle de f.

2. Soit g la similitude directe de centre O transformant K en J. Déterminer le rapport et l'angle de g.

3. a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ g$. Préciser notamment son centre.

b. Construire l'image O' de O par $f \circ g$.

c. Quelle est la nature du triangle OAO' ?

4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ f$. Préciser notamment son centre.

Similitudes indirectes

Cours parties 1 à 4

42 Soit f la similitude **indirecte** d'écriture complexe $z' = -2i\bar{z} + 3 + 3i$, et les points $A\,(1 + 2i)$ et $B\,(-2i)$.

1. Représenter la droite (AB) et son image par f.

2. Représenter l'image du cercle de centre A et de rayon 2 par f.

3. Montrer que f a un unique point fixe Ω dont on précisera l'affixe.

4. Soit Δ la droite d'équation $y = -x + 2$.
Vérifier que Ω appartient à Δ et montrer que la droite Δ est globalement invariante par f, c'est-à-dire que l'image de tout point de Δ appartient à Δ.

43 ★ Soit f la similitude **indirecte** d'écriture complexe $z' = 2i\bar{z} - 3$, h l'homothétie de centre $\Omega\,(1 + 2i)$ et de rapport 2, s la réflexion ayant pour axe la droite Δ d'équation $y = x + 1$.

1. Montrer que Ω est l'unique point fixe de f.

2. Vérifier que Ω appartient à Δ et montrer que la droite Δ est globalement invariante par f.

3. Établir les écritures complexes de h et s.

4. Montrer que $f = h \circ s = s \circ h$.
Déterminer les affixes de $O' = f\,(O)$, $O_1 = h\,(O)$ et $O_2 = s\,(O)$ et vérifier sur une figure que $O' = s\,(O_1) = h\,(O_2)$.

44 ★ Soit f la similitude **indirecte** d'écriture complexe $z' = -2\bar{z} + 3 - 2i$, et Δ la droite d'équation $x = 1$.

1. Montrer que f a un unique point fixe Ω.

2. Vérifier que Ω appartient à Δ et montrer que la droite Δ est globalement invariante par f.

3. Établir la décomposition $f = h \circ s = s \circ h$ où h et s sont respectivement une homothétie et une réflexion à déterminer.

Lieux géométriques

Cours parties 1 à 3

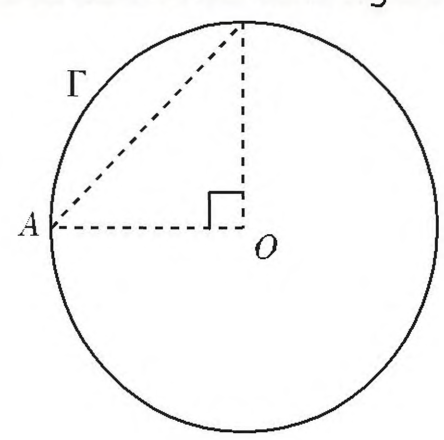
45 A étant fixe, pour tout point B du plan distinct de A, on construit le triangle ABC direct, rectangle et isocèle en A et on appelle H le projeté orthogonal de A sur (BC).
Si $B = A$, alors on considère que $C = A$ et $H = A$.

1. Quel est le lieu géométrique décrit par H quand B décrit une droite Δ donnée ?
Représenter ce lieu dans deux cas :

a. Le point A n'appartient pas à Δ.

b. Le point A appartient à Δ.

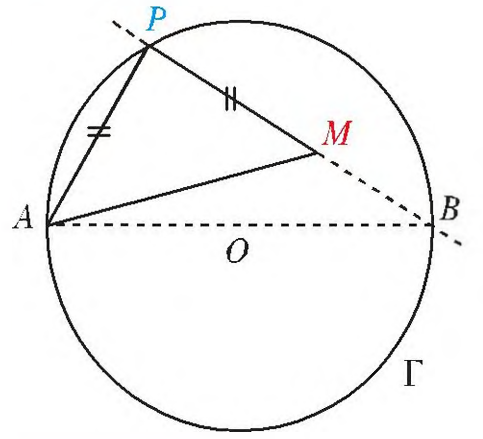
2. Quel est le lieu géométrique décrit par H quand B décrit un cercle Γ de centre O donné ?
Représenter ce lieu dans le cas de la figure ci-dessous :



46 Soit Γ un cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O, et P un point de Γ.

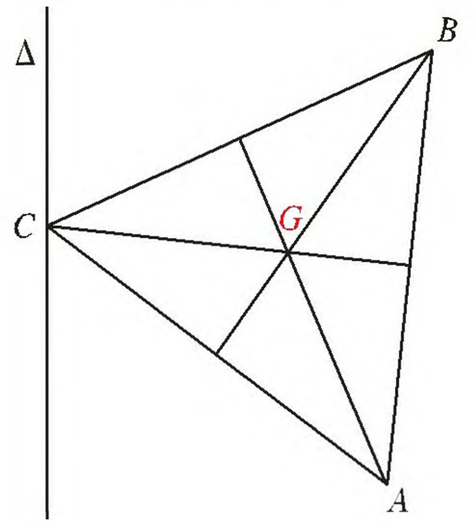
Si P est distinct de A, M est le point de la droite (BP) tel que APM soit indirect et isocèle en P ; si $P = A$, alors $M = A$.

Quel est le lieu géométrique de M lorsque P décrit le cercle Γ privé du point B ?



47 ★ ABC est un triangle équilatéral direct et G est son centre de gravité.

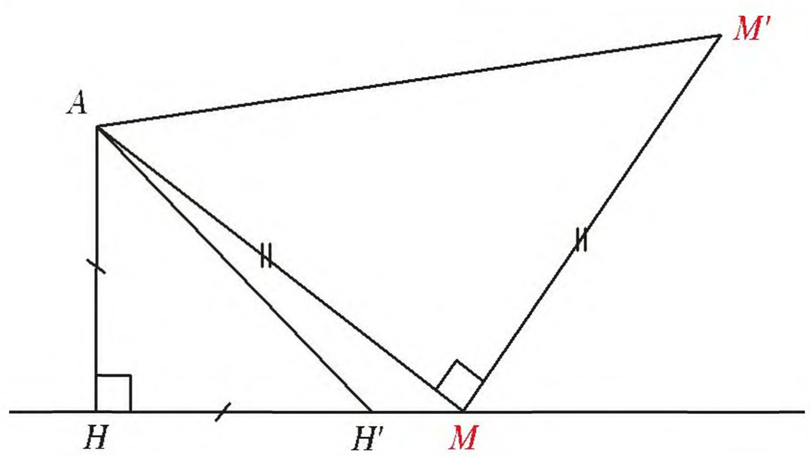
Quel est le lieu géométrique de G quand, A étant fixé, C décrit une droite Δ ne passant pas par A ?



AIDE On pourra utiliser une des similitudes décrites dans l'exercice résolu 1.

48 ★ Soit AHH' un triangle direct, rectangle et isocèle en H.

Soit M un point quelconque de (HH') et M' le point tel que AMM' soit direct, rectangle et isocèle en M.



1. Montrer qu'il existe une similitude directe de centre A qui transforme M en M'.

Donner son rapport et son angle.

2. Déterminer le lieu géométrique du point M' quand M décrit la droite (HH').

3. Soit I le milieu de $[HH']$ et K celui de $[MM']$.

Déterminer le lieu géométrique du point K quand M décrit la droite (HH').

49 ★★ Deux cercles Γ et Γ' de centres O et O' se coupent en A et B.

f est la similitude directe de centre A qui transforme O en O'.

1. Montrer que (OO') est la médiatrice de $[AB]$.

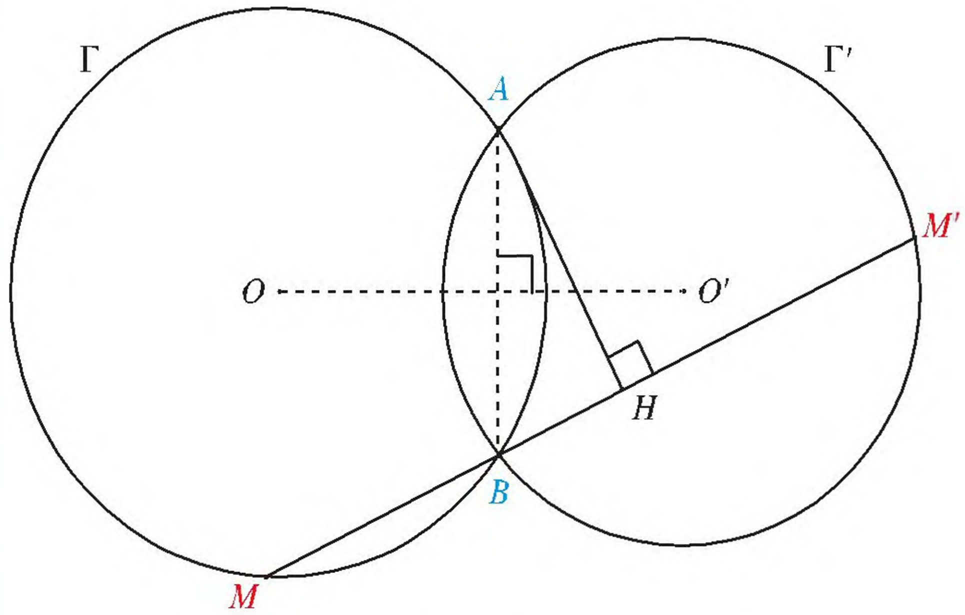
2. Montrer que f transforme Γ en Γ'.

3. Soit P et P' les points de Γ et Γ' diamétralement opposés à A.

Montrer que $P' = f(P)$ et que P, B et P' sont alignés.

On admet que, pour tout point M de Γ, les point M, B et $M' = f(M)$ sont alignés.

4. Soit M un point de Γ distinct de A, $M' = f(M)$, H le projeté orthogonal de A sur (MM') et K le milieu de $[MM']$.



On note s la similitude directe de centre A qui transforme M en H.

a. Montrer que le rapport et l'angle de s ne dépendent pas de la position du point M sur Γ.

b. En déduire le lieu géométrique de H quand M décrit le cercle Γ.

c. Déterminer et représenter le lieu géométrique de K quand M décrit le cercle Γ.

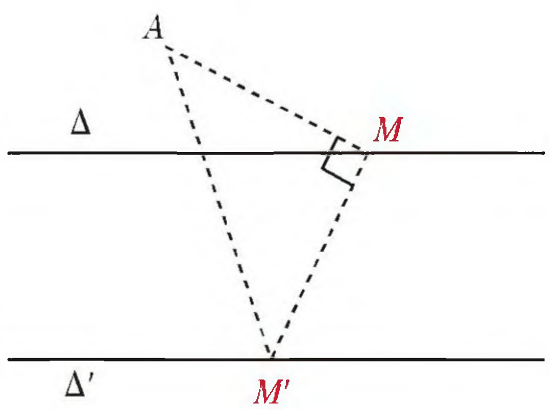
Problèmes de construction

Cours parties 1 à 4

Pour tous les exercices de cette rubrique, on s'inspirera de la méthode de résolution décrite pas à pas dans l'exercice **50**.

50 ★ Soit Δ et Δ' deux droites parallèles données et A un point donné hors de Δ et Δ'.

On veut construire tous les triangles AMM' tels que AMM' soit rectangle et isocèle en M avec $M \in \Delta$ et $M' \in \Delta'$.



1. On envisage d'abord le cas, illustré par la figure, où AMM' est **indirect**, et on suppose un tel triangle réalisé.

a. Caractériser la similitude s de centre A où M' est l'image de M.

b. Quelle est l'image de Δ par s ?
En déduire que le point M' est nécessairement à l'intersection de deux droites que l'on décrira.

c. Montrer que, réciproquement, si M' est à l'intersection de ces deux droites, alors on peut construire un point M tel que AMM' est rectangle et isocèle en M avec $M \in \Delta$ et $M' \in \Delta'$.

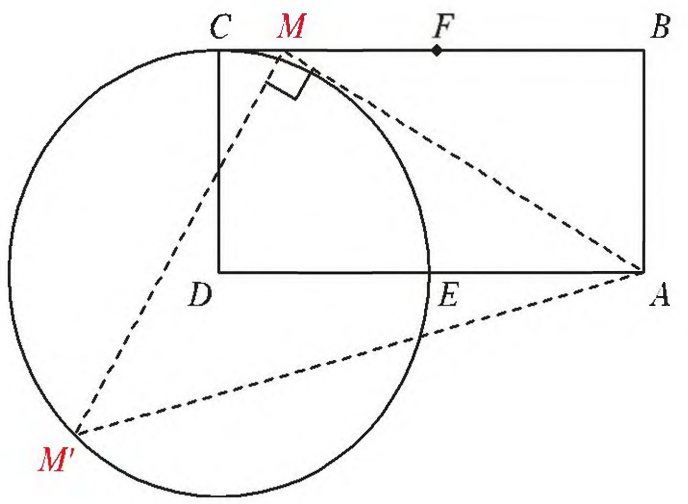
d. En conclure qu'il n'y a qu'un seul triangle AMM' indirect qui convient et le construire (on détaillera la construction de l'image de Δ par s, la construction du point M' et celle du point M).

2. Traiter, de même, le cas où AMM' est direct. Montrer qu'il n' y a qu'un seul triangle AMM' direct qui convient et le construire.

51 ★ Soit d et d' deux droites quelconques sécantes et A un point n'appartenant ni à d ni à d'. Construire un triangle AMM' direct, rectangle et isocèle en M tel que M appartienne à d et M' à d'.

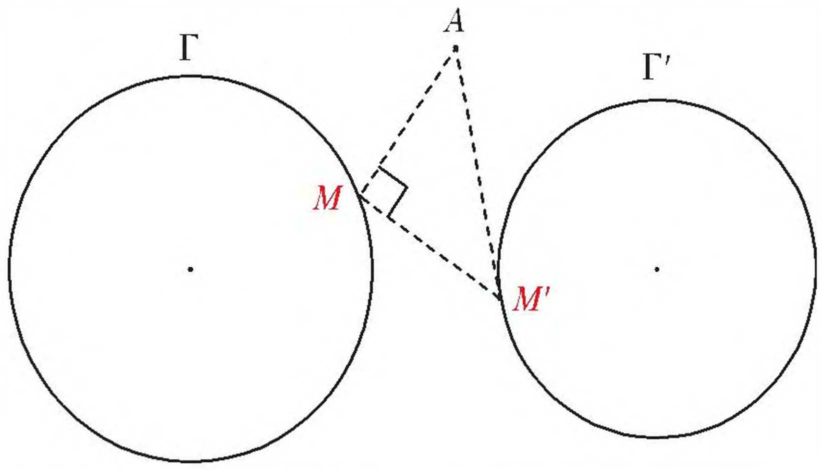
AIDE Appliquer la méthode décrite dans l'exercice précédent.

52 ★ $ABCD$ est un rectangle direct tel que $AD = 2\,AB$.
Les points E et F sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$.
Γ est le cercle de centre D passant par C et E.
Construire un triangle AMM' direct, rectangle et isocèle en M tel que M appartienne à (BC) et M' à Γ.



AIDE On montrera qu'il y a deux solutions.

53 ★★ Soit Γ et Γ' deux cercles non sécants donnés et A un point du plan. On veut déterminer combien on peut construire de triangles AMM' tels que AMM' soit direct, rectangle et isocèle en M avec $M \in \Gamma$ et $M' \in \Gamma'$.



1. On suppose un tel triangle réalisé.

a. Caractériser la similitude s de centre A qui transforme M en M'.

b. Quelle est l'image de Γ par s ?
En déduire que le point M' est nécessairement à l'intersection de deux cercles que l'on décrira.

c. Montrer que, réciproquement, si M' est à l'intersection de ces deux cercles, alors on peut construire un point M tel que AMM' est direct, rectangle et isocèle en M avec $M \in \Gamma$ et $M' \in \Gamma'$.

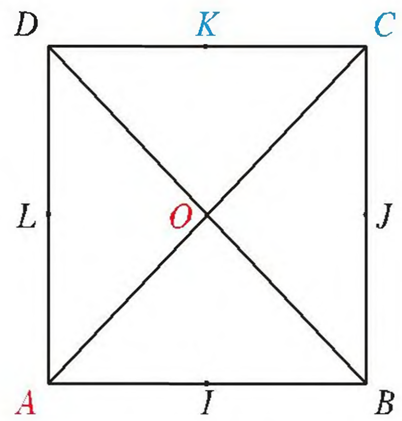
d. Conclure que le nombre de triangles qui conviennent est égal au nombre de points d'intersection de deux cercles. Décrire toutes les possibilités.

2. Construire un exemple de cercles Γ et Γ' et de point A tels qu'il y ait une infinité de triangles AMM' directs, rectangles et isocèles en M avec $M \in \Gamma$ et $M' \in \Gamma'$.

3. Construire un exemple de cercles Γ et Γ' et de point A tels qu'il y ait un unique triangle AMM' direct, rectangle et isocèle en M avec $M \in \Gamma$ et $M' \in \Gamma'$.
Construire le triangle AMM' correspondant.

54 ★ Construire le centre d'une similitude directe

$ABCD$ est un carré direct de côté 2 et de centre O.
Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



1. Soit f la similitude directe qui transforme A en O et C en K.

a. Déterminer son rapport k et son angle θ.

b. Soit Ω le centre de f. Vérifier que Ω n'est aucun des points de la figure.
Le centre Ω n'est aucun des points de la figure et l'angle θ est différent de $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$: il faut donc employer une nouvelle méthode pour construire le centre Ω.
Cette méthode utilise les résultats énoncés ci-dessous.

> Soit M un point quelconque du plan n'appartenant pas à la droite (OA), et Γ le cercle circonscrit au triangle MAO.
> Montrer que si $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) = \theta$, alors pour tous les points P d'un arc du cercle Γ on a aussi $\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PO}\right) = \theta$.
> On admet que, réciproquement, seuls les points du plan situés sur cet arc du cercle Γ vérifient la condition $\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PO}\right) = \theta$.

c. Identifier un point de la figure vérifiant la condition $\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PO}\right) = \theta$, puis un autre point de la figure vérifiant la condition $\left(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PK}\right) = \theta$.
Construire les deux cercles circonscrits correspondants.

d. Ces deux cercles circonscrits se coupent en O.
Montrer que Ω est l'autre point d'intersection des deux cercles.

2. Procéder de manière identique pour déterminer le centre de la similitude directe g qui transforme O en B et K en D.

Problèmes

55 ★★ Trois rotations pour une similitude

PARTIE 1 : Étude d'un cas particulier

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

A. Construction de la figure

1. Placer les points $A(-4-6i)$, $B(14)$, $C(-4+6i)$, $A_1(3-7i)$, $B_1(9+5i)$ et $C_1(-3-i)$.

2. Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Placer ces points sur la figure.

3. Montrer que A_1, I et B_1 sont alignés. On admettra que B_1, J, C_1 d'une part et C_1, K, A_1 d'autre part sont alignés.

4. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}\right)$.

On admettra que $\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA_1}\right) = \left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JC_1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

5. Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$?

B. Recherche d'une similitude directe

1. Soit s la similitude directe transformant les points A et B respectivement en A_1 et B_1.

Former son écriture complexe et montrer que $s(C) = C_1$.

Les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont donc directement semblables.

2. a. Déterminer le rapport et l'angle de s.

b. Déterminer l'affixe du centre Ω de s.

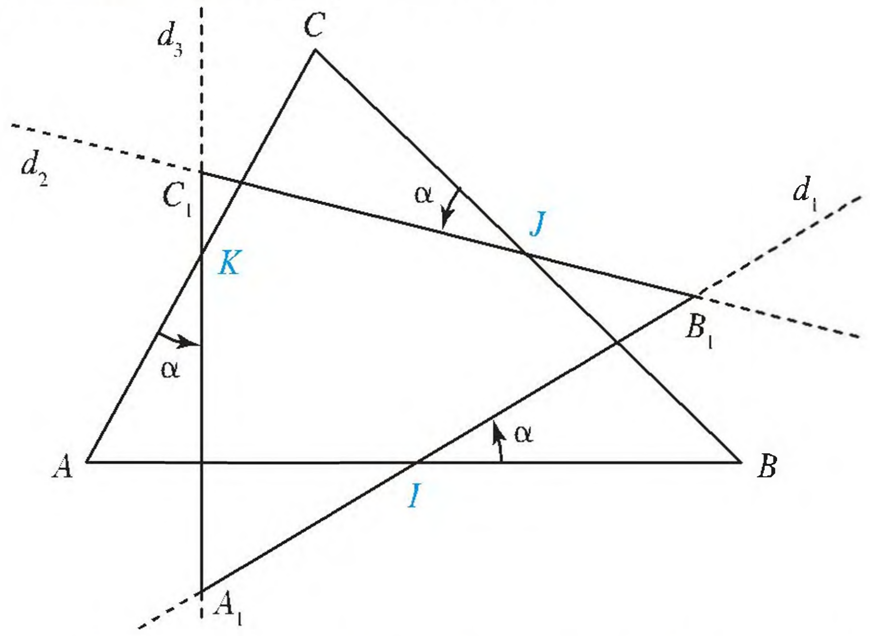
3. Montrer que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

PARTIE 2 : Cas général

ABC est un triangle direct du plan orienté.

On désigne respectivement par I, J et K les milieux de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure ci-dessous sur laquelle on raisonnera.



d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α.

d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α.

d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α.

A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3, B_1 celui de d_1 et d_2 et C_1 celui de d_2 et d_3.

1. On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1. Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont indirectement semblables.

2. En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont directement semblables.

3. On appelle f la similitude directe qui transforme ABC en $A_1B_1C_1$. Déterminer l'angle de f.

4. Soit Ω le centre de f. Montrer que Ω appartient au cercle circonscrit au triangle AKI.

AIDE On utilisera un résultat exposé à l'exercice 54.

5. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC.

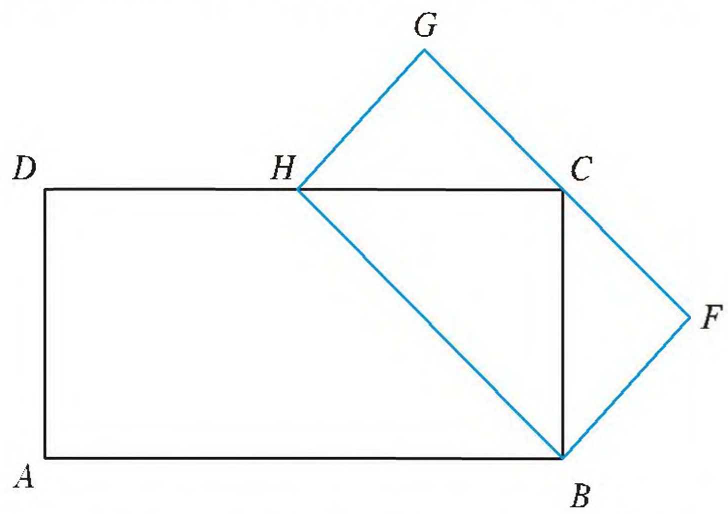
Montrer que O appartient au cercle circonscrit au triangle AKI.

6. Montrer que $\Omega = O$.

56 ★ Des rectangles semblables

Les rectangles $ABCD$ et $BFGH$ de la figure ci-dessous sont semblables : $AB = 2AD$ et $BH = 2BF$.

C et H sont les milieux respectifs de $[GF]$ et $[DC]$.



Il existe donc des similitudes qui transforment globalement $ABCD$ en $EFGH$.

Le but de ce problème est de les identifier et de les étudier.

A. Études de similitudes directes

1. Soit f_1 la similitude directe qui transforme A en H et D en G.

a. Déterminer le rapport, l'angle et le centre de f_1.

b. Montrer que f_1 transforme $ABCD$ en $BFGH$.

c. Quelle est la nature du triangle DBG ?

2. Soit f_2 la similitude directe qui transforme A en F et D en B.

a. Déterminer le rapport et l'angle de f_2.

b. Montrer que f_2 transforme $ABCD$ en $BFGH$.

c. Établir l'écriture complexe de f_2 dans le repère orthonormal direct $(A ; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AD})$.

d. En déduire l'affixe du centre Ω_2 de f_2.

e. Montrer que Ω_2 appartient au cercle circonscrit au triangle DBH.

B. Études de similitudes indirectes

1. Soit g_1 une similitude indirecte qui transforme A en B et D en F.

a. Montrer que g_1 transforme $ABCD$ en $BFGH$.

b. Montrer, en formant son écriture complexe dans le repère $(A ; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AD})$, que g_1 est unique et qu'elle a un unique point fixe P_1 dont on donnera l'affixe.

c. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = (1+\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$.

Montrer que P_1 appartient à Δ_1.

d. On considère le point $M(-2\sqrt{2}\,i)$. Montrer que M et $g_1(M)$ appartiennent à Δ_1.

En déduire que Δ_1 est globalement invariante par g_1.

2. Soit g_2 une similitude indirecte qui transforme A en G et D en H.

a. Montrer que g_2 transforme $ABCD$ en $EFGH$.

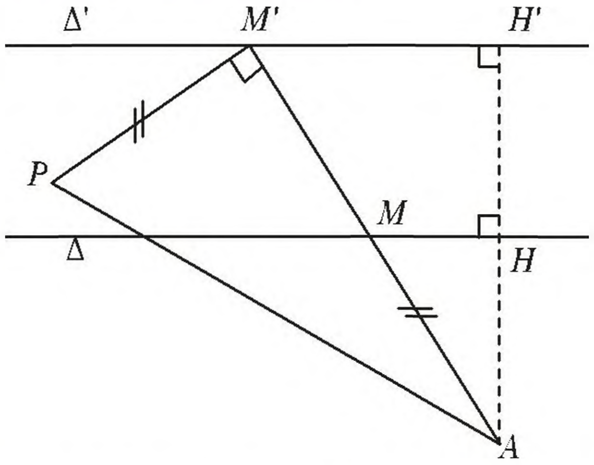
b. Montrer, en formant son écriture complexe dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AD})$, que g_2 est unique et qu'elle a un unique point fixe P_2 dont on donnera l'affixe.

C. Conclusion

Montrer que les quatre similitudes étudiées dans les parties **A** et **B** sont les seules similitudes du plan transformant globalement *ABCD* en *EFGH*.

57 ★★ Identifier une similitude directe

On considère la figure ci-dessous :



Δ et Δ' sont deux droites parallèles et A est un point fixe du plan situé sous Δ.

Le point M décrit la droite Δ, le triangle PAM' est direct et on a $PM' = AM$.

Montrer que P est l'image de M par une similitude directe de centre A.

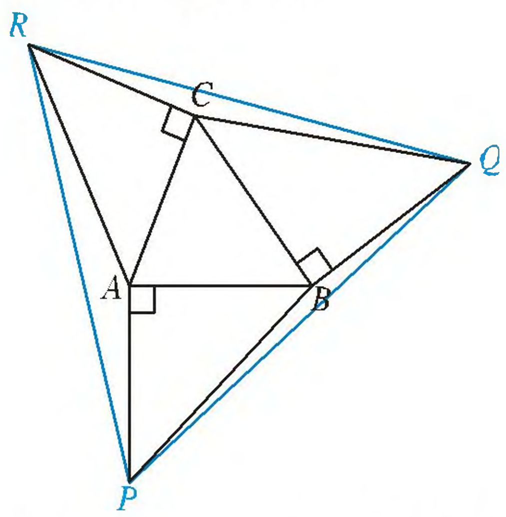
58 ★★★ Retrouver la configuration cachée....

On considère la configuration géométrique, notée Γ, décrite et représentée ci-dessous :

ABC est un triangle quelconque donné.

On construit à l'extérieur de *ABC* les triangles *ABP*, *BCQ* et *CAR* rectangles et isocèles respectivement en *A*, *B* et *C*.

On obtient ainsi un triangle *PQR*.



Montrer que, réciproquement, le triangle *PQR* étant donné, il existe un unique triangle *ABC* tel que l'on ait la configuration Γ (on ne demande pas de construire *ABC*).

AIDE Il semble naturel, au vu de la configuration, d'introduire trois similitudes directes s_P, s_Q et s_R de centres respectifs *P*, *Q* et *R*. Les points *P*, *Q* et *R* jouant un rôle symétrique, il peut être judicieux d'associer ces trois similitudes dans une transformation *f*.

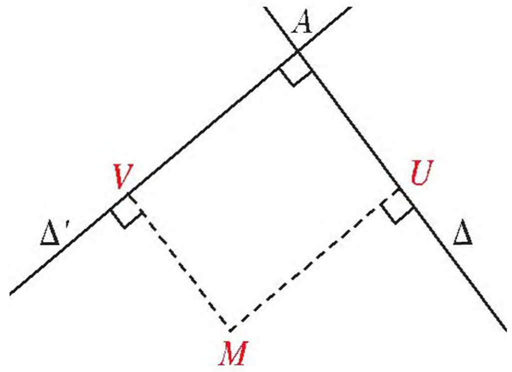
59 ★★ La droite de Simson

Partie 1 : Étude d'une similitude directe

Soit Δ et Δ' deux droites perpendiculaires données, sécantes en *A*, et *M* un point du plan hors de Δ et Δ'. On appelle *U* et *V* les projetés orthogonaux de *M* sur Δ et Δ'.

On appelle *f* la similitude directe de centre *M* qui transforme *U* en *V*.

Recopier la figure ci-dessous et la compléter au fur et à mesure des questions.



1. Montrer que Δ' est l'image de Δ par *f*.

2. Montrer que l'angle de *f* vaut $+\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$, suivant la position du point *M* dans le plan.

3. Soit $A' = f(A)$ et A_0 l'antécédent de *A* par *f*.
Construire A' et A_0.

4. Soit *P* un point de Δ et P' un point de Δ'.

a. Montrer que $P' = f(P)$ si, et seulement si, les points *P*, *P'*, *M* et *A* appartiennent à un même cercle.

b. Décrire une construction de *P'* connaissant *P*.

5. On appelle *H* le projeté orthogonal de *M* sur la droite (*PP'*) et *s* la similitude directe de centre *M* qui transforme *P* en *H*.

a. Identifier le point *H* quand $P = A_0$ et quand $P = A$.

b. Montrer que le rapport et l'angle de *s* ne dépendent pas de la position du point *P* sur la droite Δ.

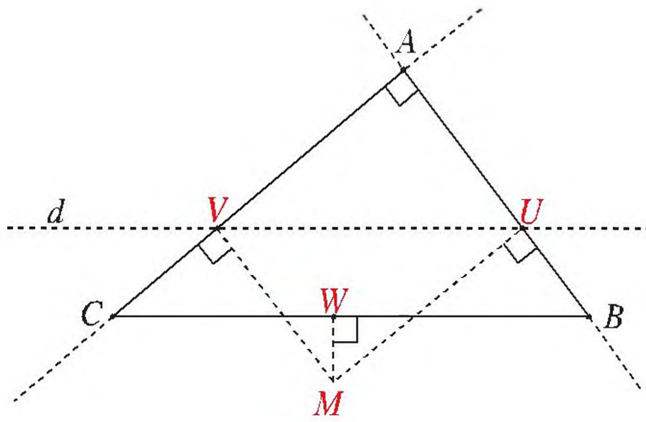
c. En déduire que, quand *P* décrit la droite Δ, *H* décrit une droite *d* que l'on précisera.

Partie 2 : La droite de Simson du point *M*

Soit *ABC* un triangle rectangle en *A*, et *M* un point quelconque du plan, hors des droites (*AB*) et (*AC*).

On appelle *U*, *V* et *W* les projetés orthogonaux de *M* sur (*AB*), (*AC*) et (*BC*).

f est la similitude directe de centre *M* qui transforme *U* en *V* (*f a été étudiée* **partie 1**). On note *d* la droite (*UV*).

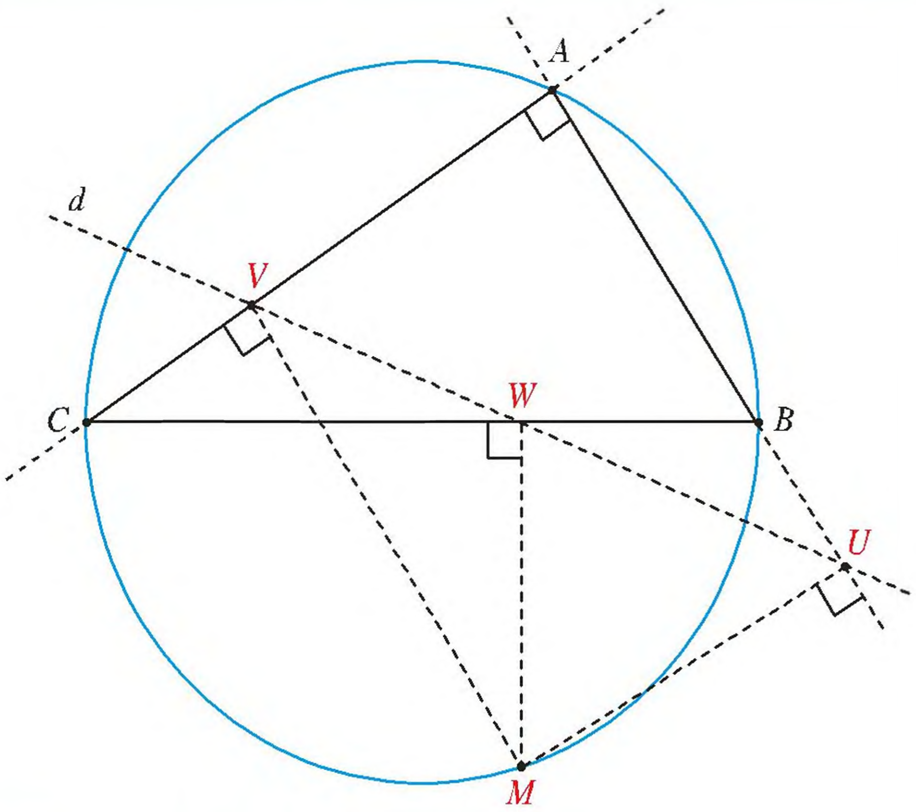


1. Montrer, que *W* appartient à *d* si, et seulement si, *C* est l'image de *B* par *f*.

2. Montrer que *C* est l'image de *B* par *f* si, et seulement si, les points *A*, *B*, *C* et *M* appartiennent à un même cercle.

3. En conclure que les projetés orthogonaux de *M* sur les trois côtés du triangle *ABC* sont alignés si, et seulement si, *M* appartient au cercle circonscrit à *ABC*.

La droite sur laquelle sont alors alignés les projetés orthogonaux de M sur les trois côtés du triangle ABC est appelée droite de Simson de M ; cette propriété (la droite de Simson de M existe si, et seulement si, M appartient au cercle circonscrit à ABC) est vraie pour un triangle ABC quelconque.



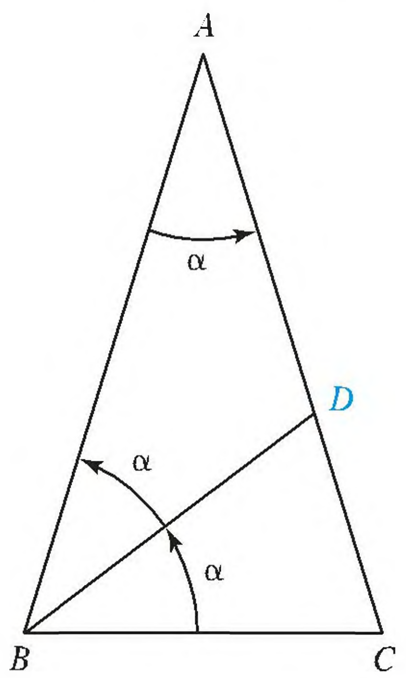
60 ★★ Le triangle doré

ABC est un triangle direct isocèle en A tel que $BC = 1$.
Sa bissectrice intérieure en B coupe (AC) en D en on a

$$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \alpha.$$

1. Déterminer une mesure de α.

2. Montrer que les triangles BCD et ABC sont directement semblables. En déduire que $AD = BD = BC$.



3. On note f la similitude directe qui transforme BCD en ABC (donc $f(B) = A$, $f(C) = B$ et $f(D) = C$).
Déterminer l'angle de f.

4. Soit k le rapport de f. Montrer que $k = AB = \dfrac{1}{AB - 1}$ et en déduire que k est égal au nombre d'or $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

5. Soit Ω le centre de f. On note I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[AB]$. On appelle g la similitude directe de centre Ω qui transforme D en I.

a. Montrer que $f \circ g = g \circ f$.
En déduire l'image de C par g.

b. Montrer que g est une homothétie.
En déduire une construction simple de Ω.

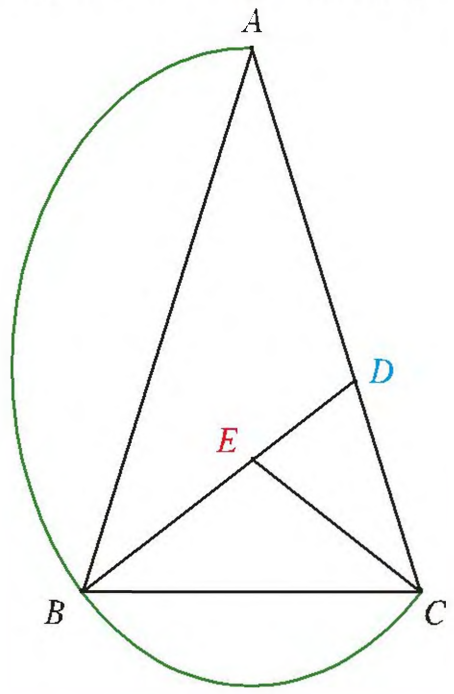
6. Construire le point $A_0 = f(A)$ après avoir établi la nature des triangles A_0AB et A_0CA.

7. On note $s = f^{-1}$ et on a donc $s(ABC) = BCD$.
La bissectrice intérieure en C aux triangles ABC et BCD coupe (BD) en E.

a. Montrer que $CDE = s(BCD) = s \circ s(ABC)$.

b. On trace l'arc de cercle AB de centre D et l'arc de cercle BC de centre E (voir figure).
Montrer que ces deux arcs de cercles ont même tangente en B (ils se « recollent » donc parfaitement pour former une courbe régulière qui s'enroule en spirale).

c. Construire cette spirale en la faisant partir du point A_0 et en la traçant jusqu'aux points F et G, points F et G à déterminer.
Vers quel point semble converger cette spirale ?



61 ★★ Une parabole pour enveloppe

Soit, dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, la rotation f de centre $A(i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et soit k un réel quelconque.

1. a. Montrer que le point M d'affixe $k - (k + 1)i$, décrit la droite Δ, d'équation $y = -x - 1$, quand k décrit $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $M' = f(M)$ a pour affixe $k + 2 + (k + 1)i$.

c. En déduire que la droite (MM') a pour équation $y = (k + 1)x - (k + 1)^2$.

2. On appelle K le projeté orthogonal de A sur la droite (MM') et H le symétrique de A par rapport à K.

a. Montrer que H est l'image de M par une similitude directe g dont on donnera les éléments caractéristiques.

b. Montrer que H a pour affixe $2k + 2 - i$.

c. En déduire que H décrit la droite d, d'équation $y = -1$, quand M décrit la droite Δ.

3. La perpendiculaire en H à d coupe (MM') en P.

a. Montrer que P est équidistant de A et de d.

b. Déterminer les coordonnées de P. En déduire que P décrit la parabole Γ, d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$, quand M décrit Δ.

c. Montrer que (MM') est tangente en P à la parabole Γ.
On dit alors que la parabole Γ est l'**enveloppe** des droites (MM') quand M décrit la droite Δ.

4. Représenter A, Δ et Γ, ainsi que les droites (MM') et les points P pour k successivement égal à -2, -1 et 1.
On peut monter, plus généralement, que, si la similitude directe f n'est pas une homothétie ou une translation, les droites (MM') ont pour enveloppe une parabole quand M décrit une droite Δ ne passant pas par le centre de f.

Type BAC

62 VRAI OU FAUX ?

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier en donnant un contre-exemple ou en démontrant à l'aide du cours.

1. Une similitude directe d'angle nul est une translation.

2. Une similitude directe d'angle π est une homothétie.

3. Une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$ est une rotation.

4. Une similitude indirecte de rapport égal à 1 n'a pas de point invariant.

5. Une similitude indirecte de rapport différent de 1 n'a pas de point invariant.

63 ROC Restitution Organisée de Connaissances

QUESTION DE COURS

Prérequis : On suppose connus les résultats suivants:
• La composée d'une similitude directe de rapport k et d'angle θ et d'une similitude directe de rapport k' et d'angle θ' est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.
• Une similitude directe de rapport 1, d'angle nul et ayant au moins un point invariant est l'identité.

Montrer que la réciproque de la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ est la similitude directe de même centre Ω, de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

APPLICATION

La similitude directe f a pour écriture complexe

$$z' = (1 + i)\,z + i.$$

Déterminer l'écriture complexe de sa réciproque f^{-1}.

64 ROC Restitution Organisée de Connaissances

QUESTION DE COURS

Prérequis : L'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes, avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Déterminer en fonction de a et b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

APPLICATION

Déterminer l'affixe du centre de la similitude plane directe d'écriture complexe $z' = \left(1 - i\sqrt{2}\right)z + 2 - i\sqrt{2}$.

65 ROC Restitution Organisée de Connaissances

QUESTION DE COURS

Prérequis : L'écriture complexe d'une similitude plane indirecte est de la forme $z' = a\bar{z} + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.

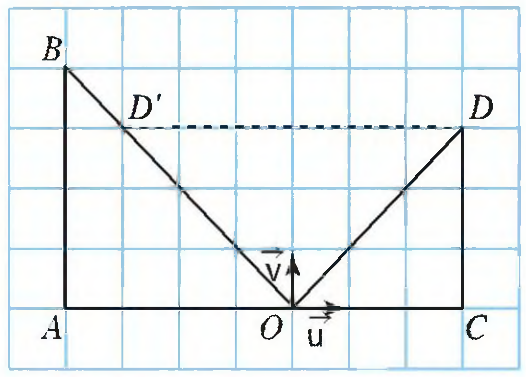
Montrer que la similitude indirecte ayant pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ a pour rapport $k = |a|$.

APPLICATION

Déterminer le rapport de la similitude plane indirecte d'écriture complexe $z' = (\sqrt{3} - i\sqrt{6})\bar{z} - 1 - 3i\sqrt{6}$.

66 EP Épreuve pratique TICE

Dans le plan complexe on considère figure ci-dessous :



f est la similitude directe telle que $f(A) = O$ et $f(O) = D$.

On veut déterminer géométriquement son centre Ω.

1. Représenter, avec un logiciel de géométrie, la figure et le cercle circonscrit au triangle OAB.

2. Remarquer la valeur de l'angle θ de f et que $\theta = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}\right)$. Construire alors un autre cercle circonscrit permettant de conjecturer la position de Ω.

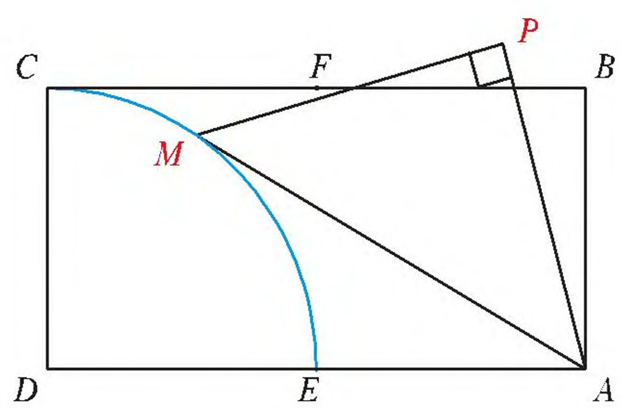
3. Établir l'écriture complexe de f. Déterminer l'affixe de son centre Ω et confirmer la conjecture de la question précédente.

PRODUCTION DEMANDÉE

- la figure réalisée aux questions **1** et **2**,
- les justifications écrites de la question **3**.

67 EP Épreuve pratique TICE

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle direct tel que $AD = 2\,AB$, E est le milieu de $[AD]$, F celui de $[BC]$. M décrit l'arc de cercle EC de centre D et le triangle APM est direct, rectangle et isocèle en P.



On veut déterminer la position du point M sur l'arc EC telle que P appartienne au segment $[BC]$.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f de centre A qui transforme M en P.

2. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, reproduire la figure, le point M étant un point libre de l'arc de cercle EC.

3. Conjecturer la position du point M sur l'arc EC telle que P appartienne au segment $[BC]$.

4. Justifier cette conjecture (on pourra considérer l'image du segment $[BF]$ dans la similitude f^{-1}).

PRODUCTION DEMANDÉE

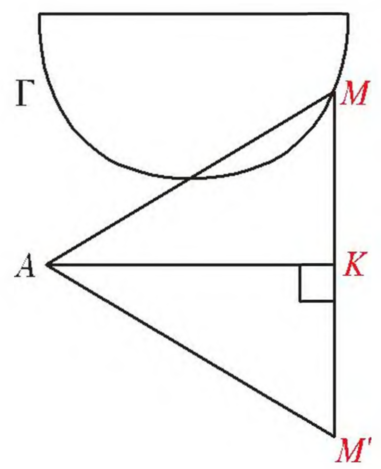
- la figure réalisée à la question **2**,
- les justifications écrites aux questions **1** et **4**.

68 EP Épreuve pratique TICE

A est un point fixé du plan.

Un point M décrit un demi-cercle Γ ; on construit le point M' tel que le triangle AMM' soit indirect et équilatéral.

Le point K est le milieu de $[MM']$.



On veut déterminer le lieu du point K quand le point M décrit le demi-cercle Γ.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, reproduire la figure ci-dessus, le point M étant un point libre du demi-cercle Γ.

2. Représenter, à l'aide du logiciel, le lieu du point K quand M décrit le demi-cercle Γ. Conjecturer la nature et la caractérisation de ce lieu.

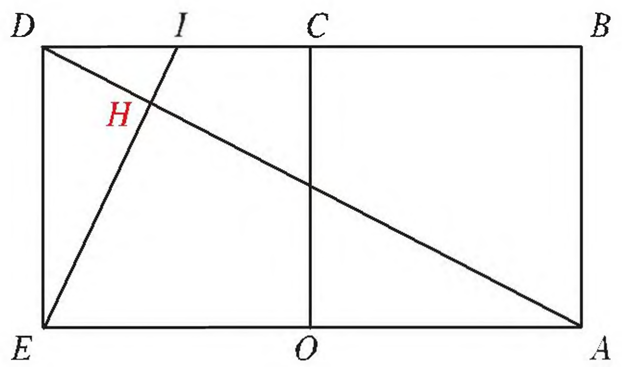
3. Déterminer le lieu géométrique de K quand M décrit le demi-cercle Γ.

PRODUCTION DEMANDÉE

- la figure réalisée aux questions **1** et **2**,
- les justifications écrites de la question **3**.

69 Sur la figure ci-dessous, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{2}$.

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$ et par H le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$.



1. Justifier l'existence d'une unique similitude directe s transformant A en I et D en E.

2. Déterminer le rapport de s.

Montrer que l'angle de s est égal à $\frac{\pi}{2}$ (on pourra utiliser un produit scalaire pour montrer qu'il y a un angle droit en H).

3. Déterminer l'image de B par s.

4. Déterminer et placer l'image de C par s.

5. Soit Ω le centre de la similitude s. Construire Ω.

6. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s dans le repère orthonormal direct $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$.

En déduire l'affixe du centre Ω de s.

70 Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique 1 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 2 + \text{i},\quad z_B = 1 + 2\text{i},\quad z_C = 6 + 3\text{i} \quad\text{et}\quad z_D = -1 + 6\text{i}.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.

2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$. Montrer que cette similitude est une rotation et préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit J le point d'affixe $3 + 5\text{i}$. Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.

4. On appelle I le point d'affixe $1 + \text{i}$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$. Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère $IMJN$.

5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères $IAPB$ et $ICQD$ sont des carrés directs.

a. Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q.

b. Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IP}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IQ}\right)$. En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.

c. En déduire que J est l'image de M par g.

Que peut-on en déduire pour J ?

71 Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points

$$A(-4\text{i}),\ B(4),\ C(4\text{i}) \text{ et } D(-4).$$

P est un point quelconque du segment $[BC]$ distinct de B et C. La droite (AP) coupe (CD) en Q.

La perpendiculaire en A à (AP) coupe (BC) en R et (CD) en S.

N est le milieu de $[PS]$ et M celui de $[QR]$.

Faire une figure.

AIDE Pour les questions qui suivent, on pourra donner une justification géométrique ou utiliser les nombres complexes.

On note f la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. a. Déterminer l'écriture complexe de f.

b. Déterminer $f(B)$. En déduire l'image de la droite (BC) par f.

c. Déterminer $f(R)$ et $f(P)$.

En déduire la nature des triangles RAQ et PAS.

On note g la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. a. Déterminer l'écriture complexe de g.

b. Quelle est l'image du segment $[BC]$ par g ?

c. Déterminer $g(R)$ et $g(P)$.

3. Montrer que les points M, B, O, N et D sont alignés.

72 $ABCD$ est un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$, I est le centre du carré et J le milieu du segment $[CD]$.

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

PARTIE A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre $[AI]$, Γ_2 celui de diamètre $[BJ]$. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3. Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.

4. On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle-même).

a. Donner la nature de la transformation h et préciser ses éléments caractéristiques.

b. Trouver l'image du point A par h.
En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

PARTIE B

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives : 0, 2, 2 + 2i et 2i.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est :
$z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.

2. Calculer l'affixe du point Ω.

3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = A$.
Placer le point E sur la figure.

73 $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm).

On considère le point A d'affixe $z_A = 1 + i$.

On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(O\,;\vec{u})$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3.

On pose $s = h \circ S_1$.

PARTIE A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.

2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.

3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.

4. a. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.

b. Montrer que $z_B = -3iz_A$.
Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

5. Soit M le milieu de $[AB]$ et P l'image de M par s. Montrer que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB).

PARTIE B

1. On pose $C = s(B)$. Montrer que P est le milieu de $[BC]$.

2. a. Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.

b. Montrer que l'image de la droite (OP) par s est la droite (OM).

c. Que représente le point M pour le triangle OBP ? Justifier.

74 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 + 5i, \qquad b = -4 + 2i \qquad \text{et} \qquad c = 1 + 4i.$$

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. a. Déterminer l'affixe du point B' image de B par f.

b. Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où l'on suppose que x et y sont des entiers relatifs, et M' l'image de M par f.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $x + 3y = 2$.

4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(-4\,;2)$ est une solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\,;5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux.
Placer ces points sur la figure.

75 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f qui, au point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'. Démontrer que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \dfrac{4x-3y-2}{5}. \end{cases}$$

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de $\mathcal{D}$ dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ de l'équation $4x - 3y = 2$, x_0 et y_0 étant deux entiers relatifs.

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation $4x - 3y = 2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = 1 + iy$, y entier relatif.

Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers.

AIDE On pourra utiliser les congruences modulo 5.

Pour préparer le BAC

Retrouver les solutions sur : www.bordas-pixel.fr/TleS

Durée : 30 minutes

ROC

Prérequis : Une similitude indirecte f a une unique écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$, avec $a \neq 0$.

AIDE
Déterminer, de façon unique les coefficients complexes a et b : pour cela, traduire les relations $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, par des équations utilisant les affixes des points.

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan complexe tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte f telle que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.

Application

Soit $A(-4-6\text{i})$, $B(14)$, $C(-4+5\text{i})$ et $D(2-7\text{i})$ quatre points du plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$.
Déterminer l'écriture complexe de la similitude indirecte f qui transforme A en C et B en D.

Durée : 30 minutes

VRAI OU FAUX ?

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$, on considère les similitudes f et g d'écritures complexes respectives $z' = 2\text{i}z + 1 - 2\text{i}$ et $z' = 2\text{i}\bar{z} + 1 - 2\text{i}$.
Valider ou infirmer les propositions suivantes :

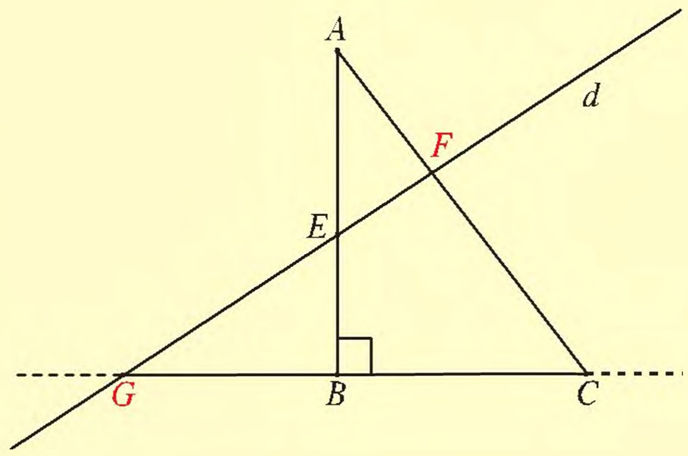
1. $f \circ f$ et $g \circ g$ sont des similitudes directes de même rapport.
2. $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des similitudes directes de même rapport.
3. L'unique point invariant de g est aussi l'unique point invariant de f.
4. La droite d'équation $y = x - 1$ est globalement invariante par g.
5. La droite d'équation $y = x - 1$ est globalement invariante par f.

Durée : 1 h 15 min

EXERCICE

Étude de deux similitudes directes

A. Soit ABC un triangle direct, rectangle en B et E un point du segment $[AB]$.
Par E, on mène une droite d qui coupe le segment $[AC]$ en F et la droite (BC) en G.
On suppose que les points E, F et G sont distincts des points A, B et C.
On appelle Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Γ' le cercle circonscrit au triangle BEG.



1. a. Justifier l'existence d'une similitude directe S_1 telle que $S_1(A) = C$ et $S_1(E) = G$.
b. Déterminer l'angle de S_1.

AIDE
Les triangles ABC et BEG sont rectangles en B.

2. a. Soit Ω le centre de S_1. Montrer que Ω appartient aux cercles Γ et Γ'.
b. Montrer que Ω n'est pas le point B. Que peut-on en déduire pour Ω ?

B. Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.
Les affixes des points A, B, C, E, F et G sont données par :

$z_A = 2 + 4\text{i}$, $z_B = -1 - 2\text{i}$, $z_C = 3 - 4\text{i}$, $z_E = 0$, $z_F = \dfrac{5}{2}$ et $z_G = -5$.

AIDE
Des vecteurs doivent être colinéaires, calculer leurs affixes.

1. Montrer que les points A, C et F sont alignés.
On admettra que les conditions de la partie **A** sont vérifiées.

2. Placer ces points sur une figure et, à l'aide des résultats de la partie **A**, construire le point Ω, centre de la similitude S_1.

3. Soit S_2 la similitude directe telle que $S_2(A) = E$ et $S_2(C) = G$. Déterminer l'écriture complexe de S_2 et déterminer l'affixe de Ω', centre de S_2. Placer Ω' sur la figure.

Que sait-on de la composée de deux similitudes directes ?

4. On considère les composées $f = S_2 \circ S_1$ et $g = S_1 \circ S_2$. Déterminer $f(A)$ et $g(A)$.

5. En déduire que $f = g$.

6. On appelle H l'image de Ω, centre de S_1, par S_2. Montrer que $f(\Omega) = H = S_1(H)$.

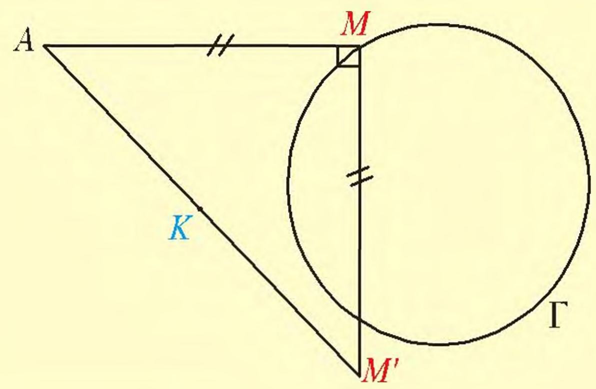
7. En déduire que les points Ω et Ω' sont confondus.

Durée : 1 heure

ÉPREUVE PRATIQUE — TICE

A est un point fixé du plan. Un point M décrit un cercle Γ, on construit le point M' tel que le triangle AMM' soit indirect, rectangle et isocèle en M. Le point K est le milieu de $[AM']$.

On veut déterminer le lieu du point K quand le point M décrit le cercle Γ.



AIDE : Utiliser la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour construire M'.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, reproduire la figure ci-dessus, le point M étant un point libre du cercle Γ.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction

2. Représenter, à l'aide du logiciel, le lieu du point K quand M décrit le cercle Γ. Conjecturer la nature et la caractérisation de ce lieu.

Appeler l'examinateur pour une vérification du lieu et des conjectures

AIDE : Identifier une transformation dans laquelle K est l'image de M.

3. Déterminer le lieu géométrique de K quand M décrit le cercle Γ.

PRODUCTION DEMANDÉE

- la figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique,
- la justification écrite de la nature et des caractéristiques du lieu de K à la question **3**.

PISTES ET CONSEILS

ROC

Démonstration : la relation $A' = f(A)$ se traduit par $z_{A'} = a\bar{z}_A + b$, de même $z_{B'} = a\bar{z}_B + b$.
Faire la différence de ces deux équations pour déterminer le coefficient a. Penser à justifier que a est défini et qu'il est non nul.

Application : Calculer le coefficient a avec la formule établie lors de la démonstration.

VRAI OU FAUX ?

a. et **b.** Revoir les résultats sur les composées de similitudes.
d. et **e.** Chercher les images de deux points distincts de la droite.

EXERCICE

A. 1. a. Évoquer un théorème du cours.
A. 2. a. Penser à une caractéristique du cercle circonscrit à un triangle rectangle et à l'angle de la similitude.
B. 3. Ω' est l'unique point fixe de S'.
B. 5. Les similitudes directes f et g ont même angle et même rapport.

ÉPREUVE PRATIQUE

2. Consulter le chapitre TICE du manuel « obligatoire » pour savoir représenter un lieu géométrique.
3. Combien mesure l'angle $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AK}\right)$? Combien vaut le rapport $\frac{AK}{AM}$?

TICE

Voir les TICE, p.131

Représenter l'image d'un point par une similitude

FICHIERS disponibles sur le site www.bordas-pixels.fr/TleS :
Solutions sous les logiciels Geoplan, GeoGebra et Cabri-géomètre

On veut représenter l'image M' d'un point M par la similitude de centre O, d'angle 90° et de rapport 2.

Utilisation de Geoplan

Cliquer sur : Créer ▸ Point ▸ Point image par ▸ Similitude (centre, angle, rapport)

S'affiche alors un menu spécifique à renseigner pour désigner la similitude et le point à transformer :

On peut, si nécessaire, transformer plusieurs points en une seule commande.



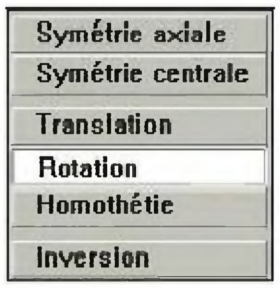
On peut choisir l'unité d'angle : degré ou radian.

Utilisation de Cabri-Géomètre

Dans Cabri-Géomètre, la transformation « similitude » n'est pas disponible.
On crée une **macro-construction** qui sera disponible en permanence et donnera immédiatement l'image d'un point M.
On décompose la similitude en une rotation suivie d'une homothétie de même centre.

- Régler l'unité d'angle choisie et éventuellement la précision des calculs (**Options, Préférences**).
- Placer un point O et un point M sur l'écran.

Construction de l'image M' de M par la similitude



- Dans le menu **Transformations**, cliquer sur **Rotation**, puis désigner successivement le point M, l'angle et le centre O.
Le point N, image de M par la rotation, apparaît.
- Dans le même menu, cliquer sur **Homothétie**, puis désigner successivement le point N, le rapport et le centre O.
Le point obtenu est l'image M' cherchée.

Création de la macro-construction



- Dans le menu **Macro-construction**, cliquer sur **Objets initiaux** et désigner *dans l'ordre* O, l'angle, le rapport et M.
- Cliquer sur **Objet final** et désigner le point M'.
- Cliquer sur **Valider une macro**.

Donner un nom à la construction (similitude 1) et le nom du premier objet final (M'). Remplir la rubrique d'aide (elle apparaîtra à la demande ; préciser, en particulier, l'ordre dans lequel les points et les nombres seront désignés).

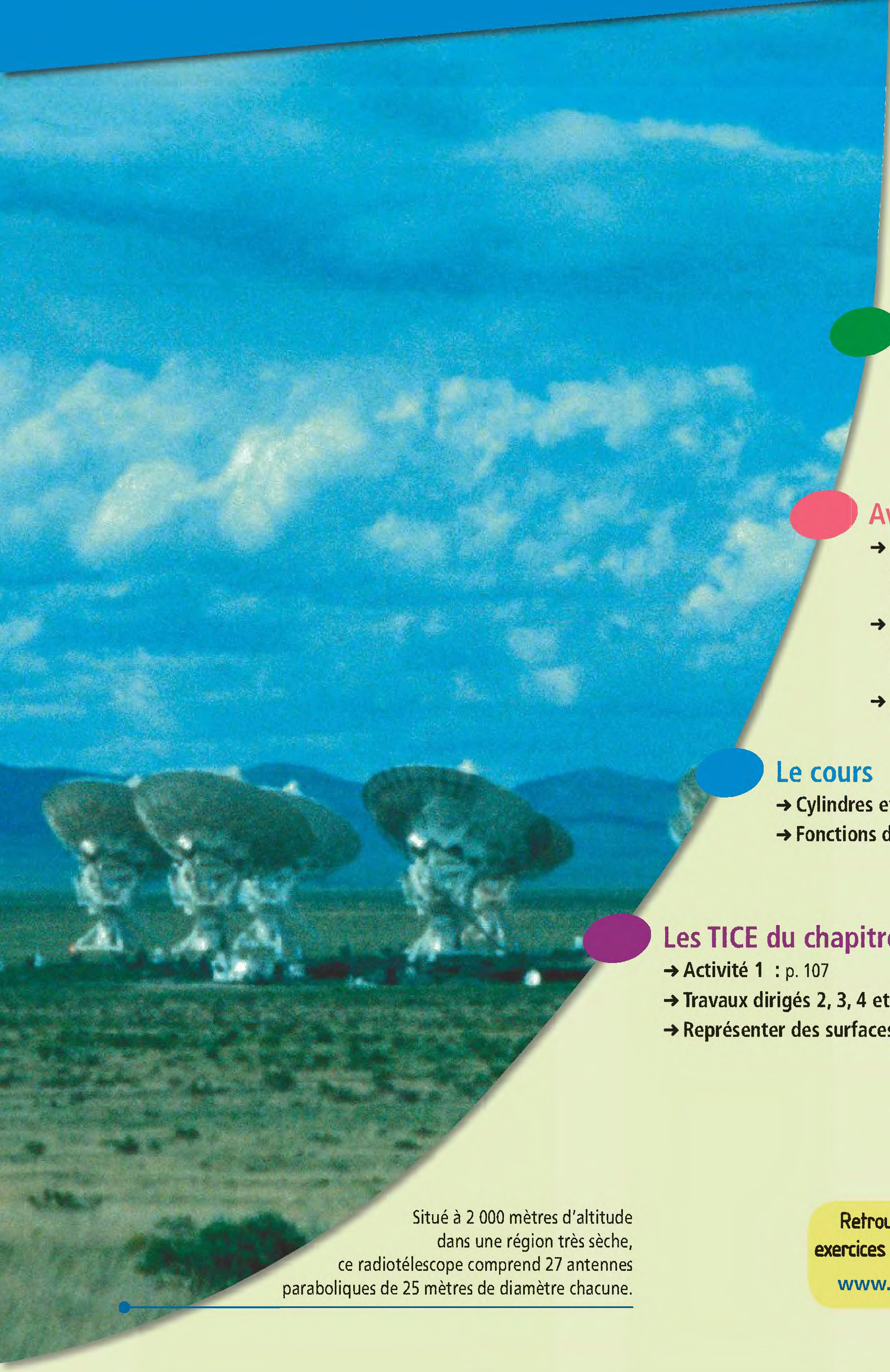
Cocher la case : **Enregistrer**, puis valider.

Utilisation de la macro-construction

Dans le fichier de figure, ouvrir (**Fichier, Ouvrir**) le fichier de macro : similitude 1.mac
Le nom **similitude 1** apparaît alors dans le menu **Macro-construction**.
Placer sur l'écran les nombres (angle et rapport, qui peuvent être quelconques), soit dans une case **Nombre**, soit en utilisant la **Calculatrice**.
Vérifier le mode de mesure d'angle.
Il suffit alors de cliquer sur **similitude 1** puis de désigner *dans l'ordre* le centre, l'angle, le rapport et M pour obtenir M'.

Sections planes

4



Situé à 2 000 mètres d'altitude
dans une région très sèche,
ce radiotélescope comprend 27 antennes
paraboliques de 25 mètres de diamètre chacune.

Retrouver les solutions des exercices repérés par www. sur :
www.bordas-pixel.fr/TleS

Cadrans solaires

Longtemps les hommes se sont contentés d'observer le lever et le coucher du soleil et d'apprécier la hauteur du soleil pour se repérer dans la journée. La position et la longueur de l'ombre d'un style (simple tige produisant l'ombre), d'un bâton, d'un bâtiment ou d'un homme, donnaient aussi des indications utiles. On sait que cette longueur est minimale à midi, heure solaire. La position et la longueur de l'ombre dépendent non seulement de chaque instant de la journée, mais aussi de sa date dans l'année. Les cadrans solaires peuvent donc servir à la fois d'horloge et de calendrier. Les progrès communs de l'astronomie et de la géométrie permirent de les construire de manière raisonnée et précise.

Le cône solaire

■ Si on considère un point donné *S*, matérialisé par l'extrémité d'un style vertical, les rayons issus du soleil et passant par ce point *S* décrivent pendant la journée un cône de révolution passant par *S*.

L'axe de ce cône est l'axe du monde, c'est-à-dire l'axe des pôles célestes autour duquel les astres, en particulier le soleil, semblent tourner chaque jour. Compte tenu de la distance de la terre au soleil on peut négliger le rayon de la terre et considérer, sans erreur sensible, que cet axe passe par *S*.

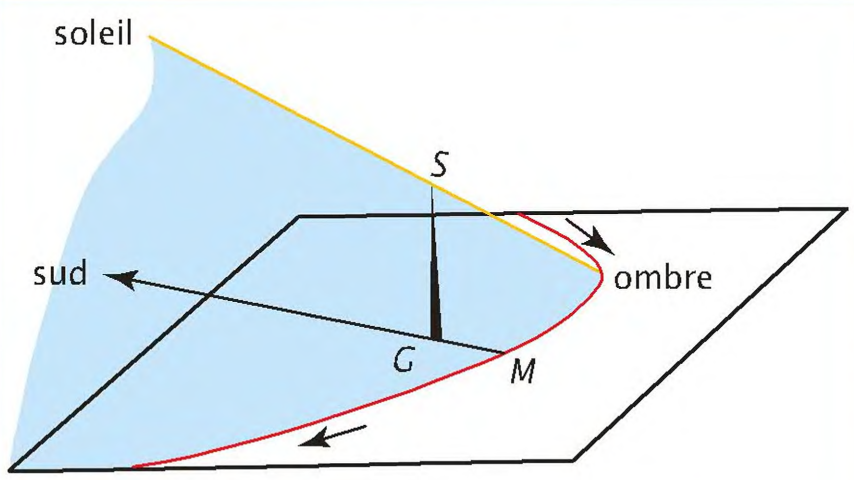


Fig. 1

L'ombre du point *S* sur un plan horizontal décrit pendant la journée un arc d'hyperbole, intersection du cône de révolution et du plan horizontal (**fig.1**). La plus courte distance de *G* à cet arc d'hyperbole détermine un point *M*. Lorsque l'ombre de *S* est en *M*, il est midi au soleil et le plan (*SGM*) est le plan méridien passant par (*GS*).

Une construction

■ Dans ce plan on matérialise l'axe du cône par un style [*GI*]. À chaque heure du jour, le plan passant par le soleil et (*GI*) coupe un plan (*E*) perpendiculaire à cet axe ((*E*) est un plan équatorial). Les différentes intersections forment les graduations régulières d'une horloge solaire (**fig.2**).

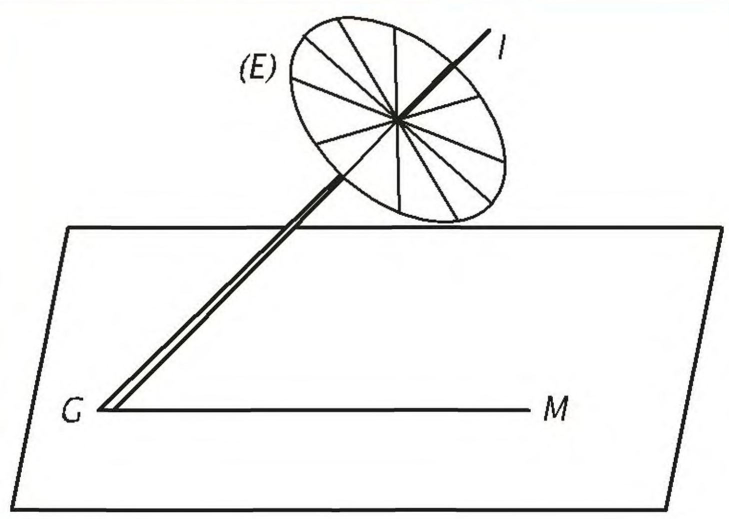


Fig. 2

Les lignes horaires situées dans le plan horizontal peuvent s'en déduire (Voir Ressources).

(*GIM*) étant le plan méridien passant par (*GI*), la méridienne (*GM*) indique « midi » et on démontre que l'angle (*GM*, *GI*) est égal à la latitude du point *G*.

Cette propriété donne la construction classique du style d'un cadran solaire horizontal.

Ressources

- René R.J. Rohr, *Les cadrans solaires, histoire, théorie, pratique*, Éditions Oberlin, Strasbourg, 1986.
- http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Soleil/Heure/cad_h.html

L'essieu du cadran solaire

■ Girard Desargues (1591-1661), grand savant de l'époque de Louis XIII, propose une autre méthode purement géométrique pour déterminer l'axe du monde passant par un point *B* donné, qu'il nomme « essieu du cadran solaire ». Cet essieu sera matérialisé par la tige (*Bi*) (**fig. 3**).

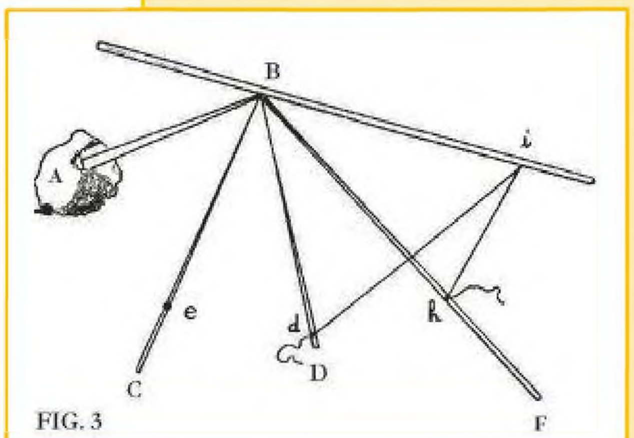


FIG. 3

Il note à trois instants de la journée, les trois ombres *C*, *D* et *F* du point *B* et il matérialise avec trois fines baguettes les génératrices *BC*, *BD* et *BF* du cône de révolution de sommet *B* engendré par la course du soleil.

À partir de *B*, sur chacune de ces génératrices, il porte une même longueur *k* et obtient trois points *e*, *d* et *h*. Avec un compas il reporte les distances *ed*, *eh* et *dh* sur une feuille de dessin pour tracer un triangle *edh* égal au premier. Sur cette feuille il détermine, à la règle et au compas, le centre *i* du cercle circonscrit au triangle *edh* et le rayon *r* de celui-ci.

Il construit aussi, sur cette même feuille, le triangle *Bih*, rectangle en *i*, dont il connaît l'hypoténuse $Bh = k$ et un côté $ih = r$.

Sur l'essieu qui repose en *B* il marque le point *i* avec la longueur *Bi* trouvée.

Entre *i* et *d* d'une part et *i* et *h* d'autre part il fixe deux fils de métal tels que $id = ih = r$.

Pour trouver la position exacte de son essieu (c'est-à-dire pour poser le style de son cadran) il lui suffit de tendre les deux fils.

Une autre construction

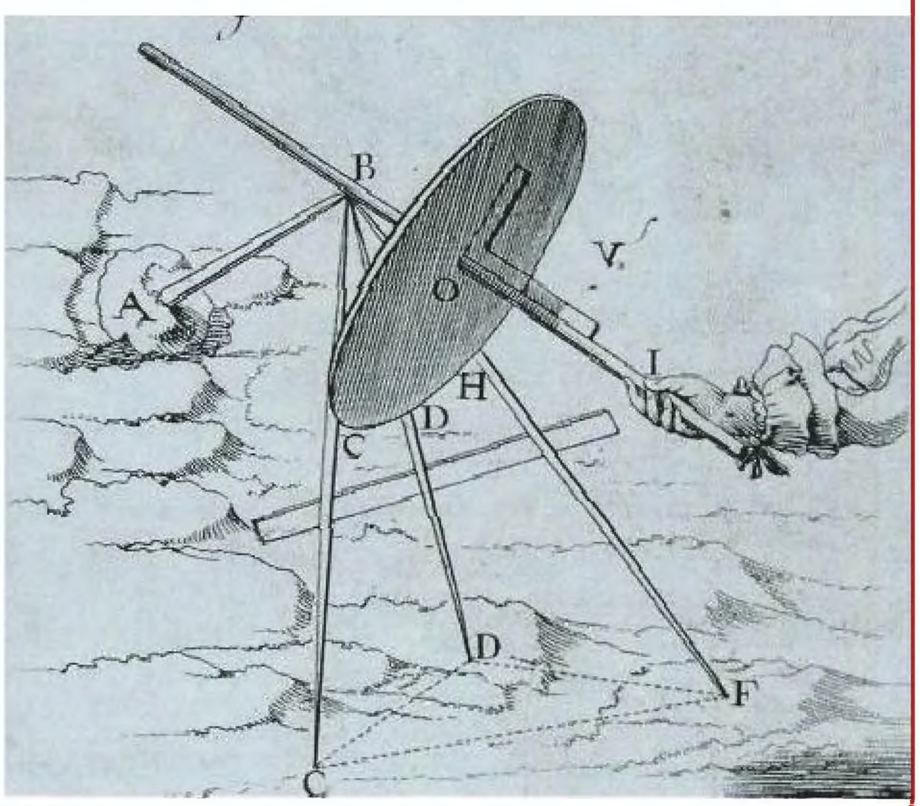
■ Cette construction est ingénieuse mais peu pratique. Dans une lettre adressée à Mersenne, le 28 janvier 1641, Descartes (1596-1650) écrit : « Je viens de recevoir vostre dernière du dix-neufiesme Janvier, avec le papier de M. des Argues, que je viens de lire tout promptement. L'invention en est fort belle, et d'autant plus ingenieuse qu'elle est plus simple. Car il n'y a pas grande difficulté à reconnoistre qu'elle est conforme à la théorie, en considérant seulement que ces trois premieres verges representent trois lignes droites en la superficie du cone que décrit l'ombre du Soleil ce jour-là, et que leur rencontre est le sommet de ce cone ; que le triangle est imaginé inscrit dans le cercle de l'équateur, duquel il trouve le centre par la rencontre des deux perpendiculaires sur les deux costez de ce triangle [*i.e. les deux médiatrices des côtés du triangle*] ; et que la ligne tirée de la rencontre de ces perpendiculaires à l'un des angles est le rayon de ce cercle : d'où le reste est evident. Mais il me semble que, pour la pratique, l'usage de ces fils de metal n'est pas si exact... ». Descartes propose une deuxième construction qu'il considère comme plus précise mais en fait assez peu pratique.

■ Desargues, sensible aux remarques de Descartes, va imaginer un troisième dispositif que décrit Abraham Bosse (1604-1676), graveur et savant, dans son traité de 1643, *La manière universelle de M R Desargues, Lyonnois, pour poser l'essieu.*

■ On voit sur cette gravure que les génératrices du cône engendré par les rayons du soleil passant par *B*, pendant une journée, sont matérialisées par les trois fines baguettes (*BC*), (*BD*) et (*BF*).

■ Perpendiculairement à l'essieu (*BI*) on a placé un disque. Bosse appelle ce dispositif : une pirouette. Une équerre assure en tournant l'orthogonalité du disque et de l'essieu, tandis qu'une règle garantit que les trois génératrices ne sont pas coplanaires.

■ La main fait en sorte que l'essieu touche le bout *B* de la broche, tandis que le bord du disque touche simultanément les trois fines verges. Dans ces conditions le style du cadran trouve sa juste position en (*BI*).



TD 5 p.118

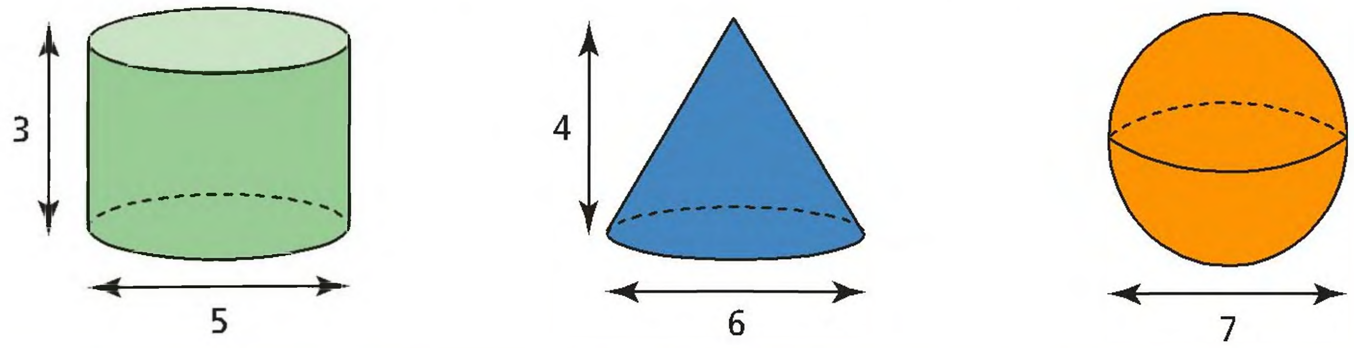
1 Déterminer centre et rayon d'un cercle

Déterminer le centre et le rayon des cercles dont les équations sont données ci-dessous.

a. $x^2 + y^2 = 4$ b. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$ c. $x^2 - 4x + 3 + y^2 = 0$

2 Calculer un volume

Déterminer, à 10^{-2} près, le volume de chaque solide ci-dessous.



3 Utiliser le vecteur normal d'un plan

Déterminer une équation des plans définis par un vecteur normal et un point.

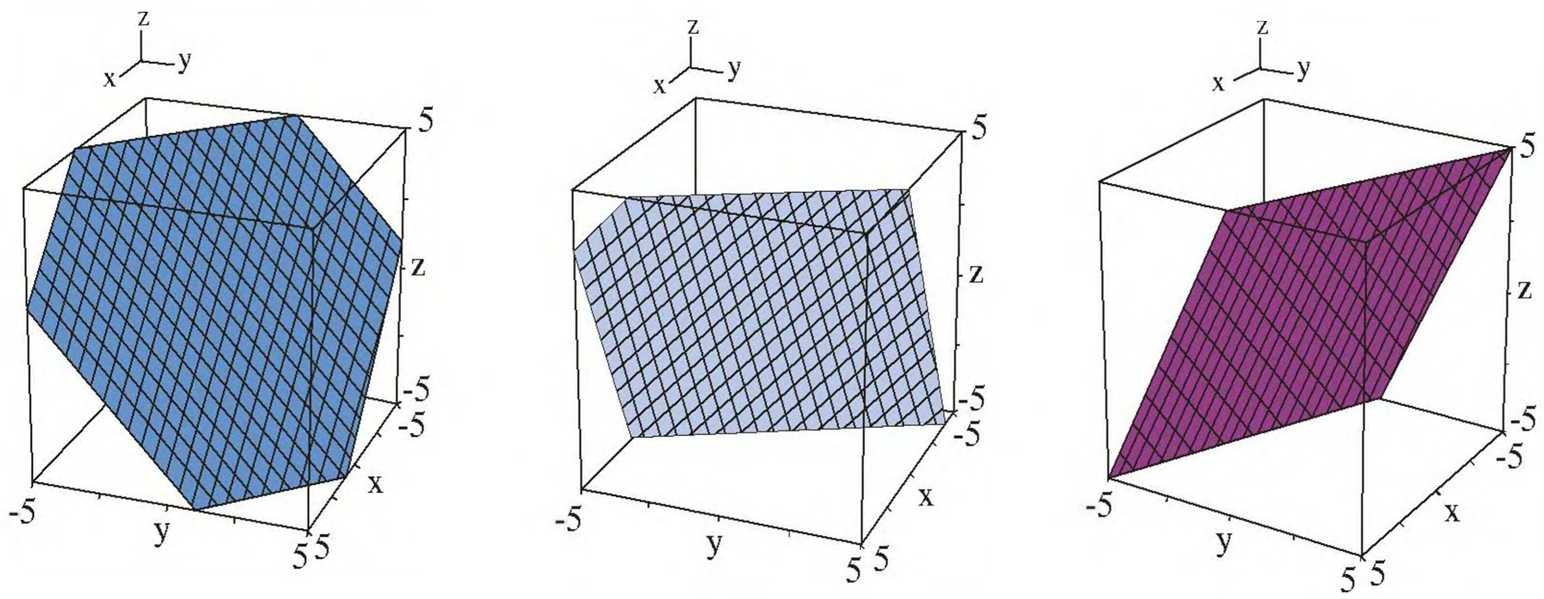
a. $\vec{u}(1;-1;2)$ et $A(1\,;2\,;3)$ b. $\vec{n}(2;1;-3)$ et $B(3\,;-2\,;0)$

AIDE Penser au produit scalaire !

4 Lire un graphique

Retrouver le plan correspondant à chacune des équations suivantes :

a. $2x + y - z - 2 = 0$ b. $-x - 2y + z = 0$ c. $x + y + z = 1$



5 Déterminer des équations d'une droite dans l'espace

Soit les points $A(1\,;0\,;2)$ et $B(-2\,;4\,;6)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

AIDE Penser à la colinéarité.

6 Déterminer l'intersection de deux plans

Soit les plans $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - z - 7 = 0$ et $\mathcal{Q}$ d'équation $2x - y + 2z - 4 = 0$.

1. Justifier que l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est une droite.
2. Déterminer une représentation paramétrique de celle-ci.

Memento p.140

ACTIVITÉ 1 Solide de révolution et équation TICE

Soit le point $A(0\,;0\,;2)$ et le plan $\mathcal{P}$, parallèle au plan (xOy), passant par A.
Soit le cercle Γ de centre A, de rayon 3 et inclus dans le plan $\mathcal{P}$. B est un point de Γ.

1 Faire une figure avec un logiciel de géométrie 3D. Construire la droite (OB).

2 Lorsque B décrit le cercle Γ, on obtient un solide de révolution $\mathcal{S}$, illimité.
Comment s'appelle cet ensemble de points ?

3 Soit le point $C(0\,;0\,;4)$ et le plan $\mathcal{Q}$, parallèle à (xOy) passant par C.
Quel semble être l'intersection du plan $\mathcal{Q}$ et du solide $\mathcal{S}$?

4 Démontrer que les points $D(0\,;3\,;2)$ et $E(0\,;6\,;4)$ sont deux points de $\mathcal{S}$.
En utilisant le mode « plan isolé » (OCE), que forme la configuration des points OAC d'une part et ODE d'autre part ?

5 Soit le point $Z(0\,;0\,;z)$ et le plan $\mathcal{R}$ contenant Z et parallèle à (xOy). En s'aidant du cercle Γ, quel sera le rayon du cercle d'intersection de $\mathcal{R}$ et du solide $\mathcal{S}$?
En déduire une relation entre les coordonnées x, y et z d'un point $M(x\,;y\,;z)$ du solide $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

ACTIVITÉ 2 Fonction de deux variables

On considère un réservoir de gaz comprimé de longueur totale ℓ et de diamètre d.
Il a la forme d'un cylindre coiffé aux deux extrémités d'une demi boule.

1 Déterminer le volume du réservoir en fonction de ℓ et de d.

2 Soit la fonction f de deux variables x et y définie par $f(x\,;y)=\frac{\pi}{4}xy^2-\frac{\pi}{12}y^3$.

a. On a obtenu la surface ci-contre à l'aide d'un logiciel 3D en entrant l'équation

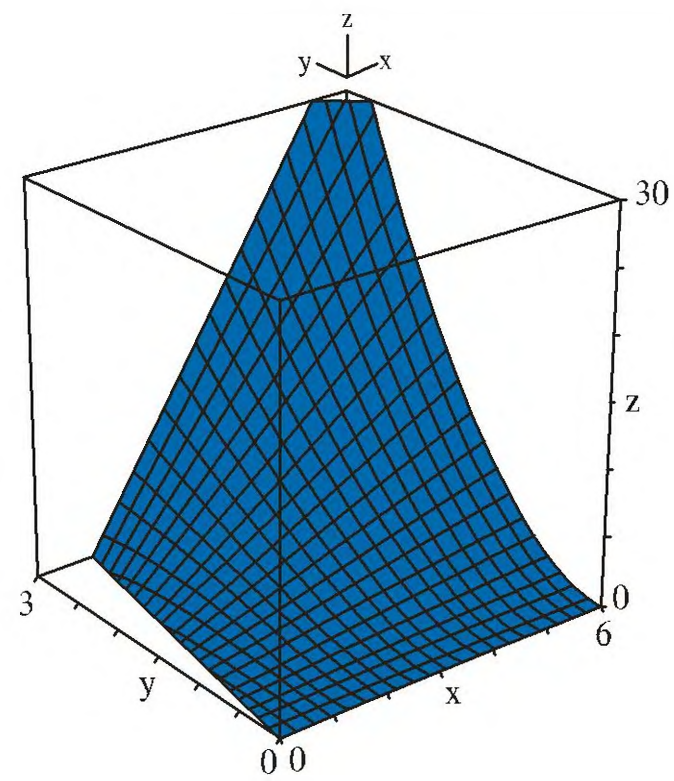
$$z=\frac{\pi}{4}xy^2-\frac{\pi}{12}y^3.$$

Quel est le lien entre cette surface et la fonction f ?

b. Lire approximativement le volume d'un réservoir de 6 m de longueur et de 1,5 m de diamètre.

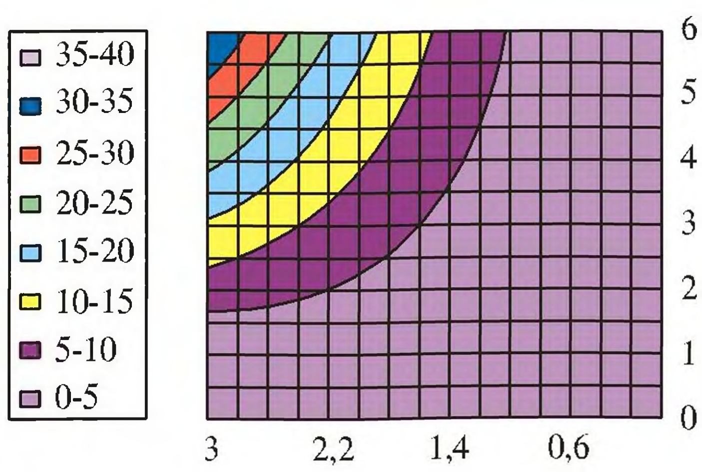
c. On suppose que $f(x\,;y)=\frac{\pi}{2}$. Quelle relation obtient-on entre x et y ?

Quelle est la particularité des citernes dont les dimensions vérifient cette relation ?



3 **a.** Le manuel du technicien donne les « abaques » ci-contre. Les expliquer.

b. Entre quelles valeurs peut-on encadrer le volume d'une citerne de 5 m de long et de 1,6 m de diamètre ?



1 Cylindres et cônes

Dans tout ce chapitre, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a. Cylindre illimité

INFO
Un tel ensemble est une surface de révolution.

Définitions • Un **cylindre** illimité est obtenu par la rotation autour de son axe d'une droite parallèle à l'axe et située à une distance r appelé rayon.

• Chacune des droites obtenues est appelée **génératrice** du cylindre.

INFO
$x^2 + y^2 \leqslant r^2$ est l'équation d'un cylindre « plein ».

Théorème Un cylindre d'axe (Oz) de rayon r est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $x^2 + y^2 = r^2$ et $z \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION Soit $M(x ; y ; z)$ un point du cylindre.
Son projeté orthogonal H sur l'axe des cotes (Oz) a pour coordonnées $(0 ; 0 ; z)$.
$d(M ; H) = r \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$.

Théorème **Section d'un cylindre par un plan $\mathcal{P}$ parallèle aux axes**

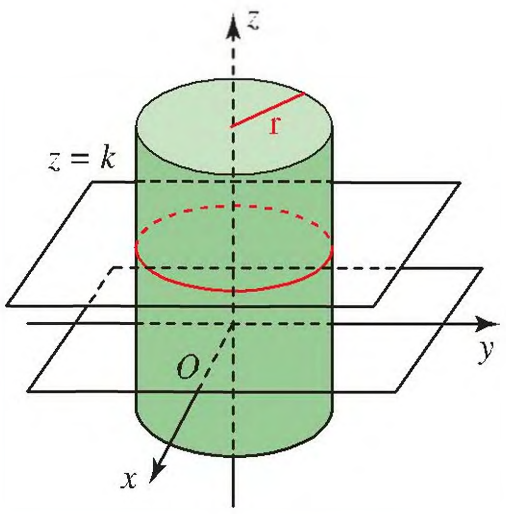
• Si $\mathcal{P}$ est parallèle au plan de base et d'équation $z = k$, la section est un cercle contenu dans $\mathcal{P}$, de centre $(0 ; 0 ; k)$ et de rayon r.

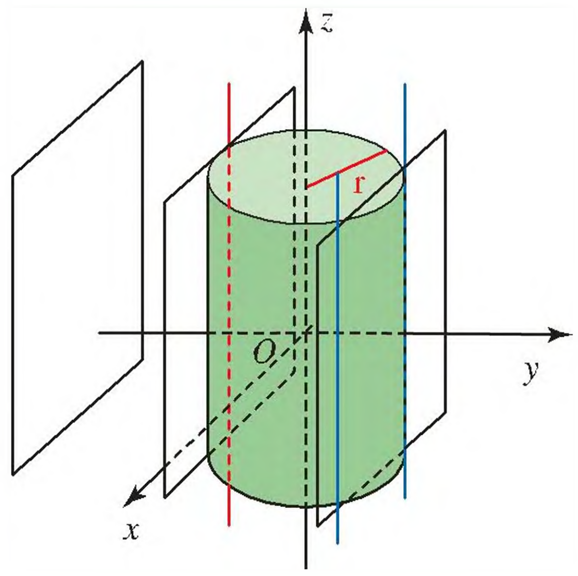
• Si $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz), on distingue 3 cas :

– Si $d(\mathcal{P} ; (Oz)) > r$, l'intersection est vide.

– Si $d(\mathcal{P} ; (Oz)) = r$, la section est une droite parallèle à (Oz).

– Si $d(\mathcal{P} ; (Oz)) < r$, la section est la réunion de deux droites parallèles à (Oz).





b. Cône illimité

Définitions • Un **cône** illimité est obtenu par la rotation autour de son axe d'une droite sécante à son axe.

• Chacune des droites obtenues est appelée **génératrice** du cône.

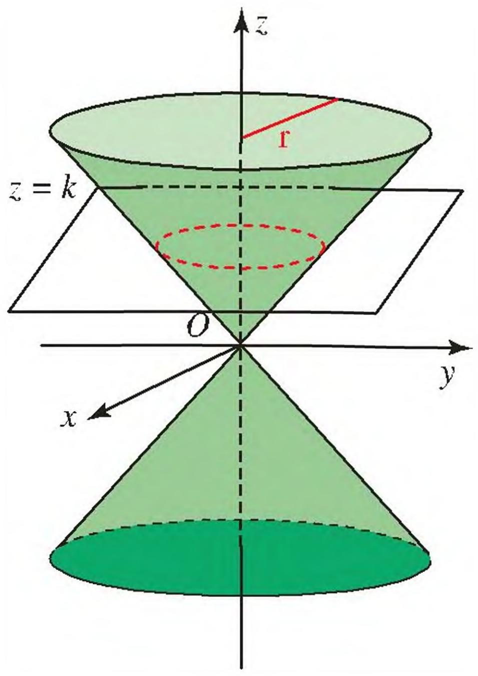
Théorème Un cône d'axe (Oz), de rayon r et de sommet $O(0 ; 0 ; 0)$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $x^2 + y^2 = m^2 z^2$ et $z \in \mathbb{R}$, avec $m = \tan\alpha$ où α est l'angle entre l'axe et la génératrice.

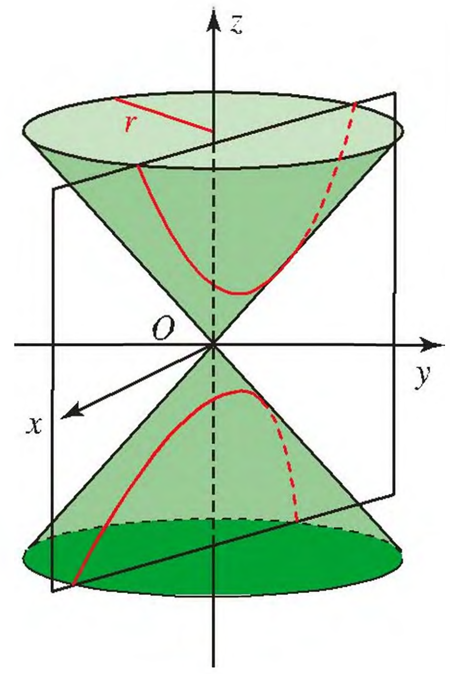
DÉMONSTRATION Soit $M(x ; y ; z)$ un point du cône.
Son projeté orthogonal H sur l'axe des cotes (Oz) a pour coordonnées $(0 ; 0 ; z)$.
Le triangle OHM est rectangle en H et $HM = \tan\alpha\ OH$, d'où $x^2 + y^2 = \tan^2\alpha \times z^2$.

Théorème **Section d'un cône par un plan $\mathcal{P}$ parallèle aux axes**

- Si $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (xOy) et d'équation $z = k$, la section est un cercle contenu dans $\mathcal{P}$, de centre $(0 ; 0 ; k)$ et de rayon $|mk|$.
- Si $\mathcal{P}$ parallèle à l'axe (Oz), la section est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes en O.

INFO
Le cercle est éventuellement réduit au point O.





Le cours en action

Déterminer une équation de cylindre

ÉNONCÉ **Déterminer une équation du cylindre d'axe (Oz) passant par $A(2 ; 3 ; 4)$.**

SOLUTION Calculons le rayon d'un cercle de base :

$$r = d(A ; (Oz)) = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Le cylindre a pour équation $x^2 + y^2 = 13$, $z \in \mathbb{R}$.

Exercices 1 à 9

Déterminer une équation de cône

ÉNONCÉ **Déterminer une équation du cône ayant pour section verticale un demi-carré.**

SOLUTION L'angle entre l'axe et la génératrice vaut $\frac{\pi}{4}$ et $\tan\frac{\pi}{4} = 1$. Le cône a pour équation $z^2 = x^2 + y^2$.

Exercices 10 à 22

Déterminer une intersection

ÉNONCÉ **Dans un tunnel semi-cylindrique de rayon 3 m, quelle est la largeur utile du rectangle de surface à la hauteur de 2 m ?**

SOLUTION L'intersection du cylindre d'équation $x^2 + z^2 = 9$ et du plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 2$, a pour équation $x^2 = 5$, d'où les deux points $B(\sqrt{5} ; 0 ; 2)$ et $B'(-\sqrt{5} ; 0 ; 2)$.

Alors, la largeur utile est $BB' = 2\sqrt{5}$.

De plus, le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe du cylindre, donc les deux droites passant par B et B' sont parallèles, de vecteur directeur $\vec{j}$.

Exercices 1 à 9

2 Fonctions de deux variables

a. Représentation d'une fonction de deux variables

Définitions Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

• On appelle **fonction** numérique **de deux variables** réelles, une fonction f qui à un couple de réels $(x\,;y)$, $x \in I$, $y \in J$, associe un réel, noté $f(x\,;y)$. On a $f : (x\,;y) \mapsto f(x\,;y)$.

La **représentation graphique** d'une fonction de deux variables est la surface, ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ qui vérifient $z = f(x\,;y)$, équation de la surface représentative de f.

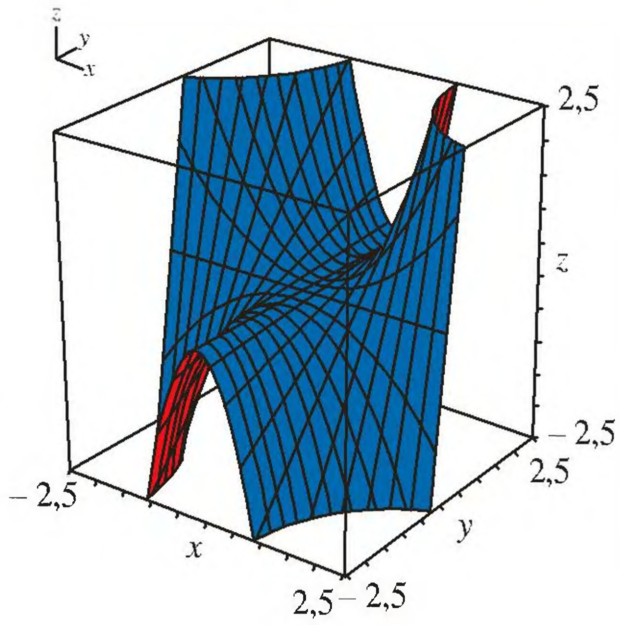
INFO
$f(3\,;2)$ est le volume d'un cône de rayon 3 et de hauteur 2.

EXEMPLE Le volume d'un cône de rayon x et de hauteur y est $f(x\,;y) = \dfrac{\pi}{3}x^2y$.

Sa représentation graphique pour

$$x \in [-2{,}5\,;2{,}5] \text{ et } y \in [-2{,}5\,;2{,}5]$$

est donnée ci-contre.



• La section par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x = 3$ est, dans ce plan, une droite d'équation $z = 3\pi\,y$.

• La section par le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $y = 2$ est la parabole d'équation $z = \dfrac{2\pi}{3}x^2$.

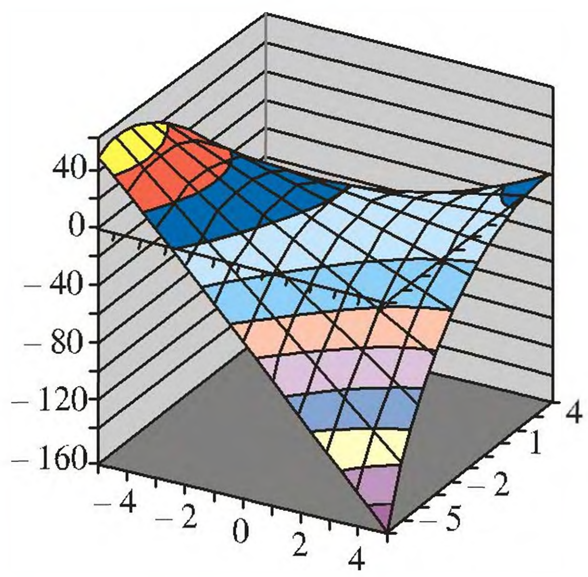
b. Lignes de niveau

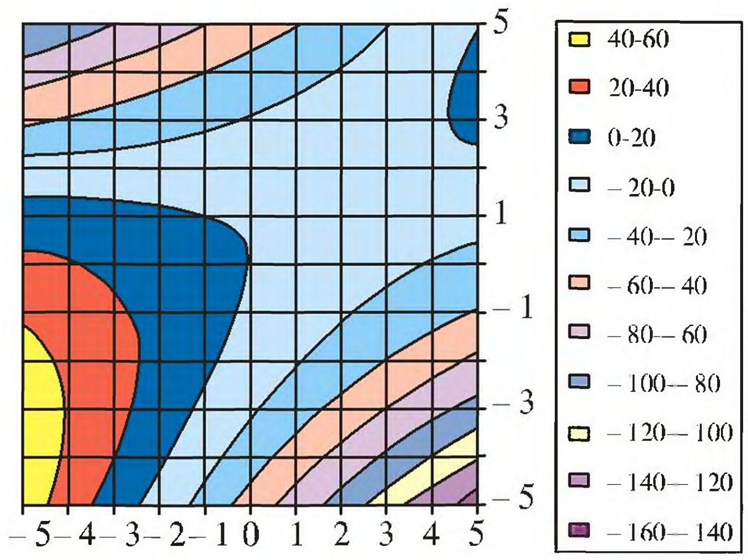
Définition Étant donné une surface et un réel k fixé, on appelle ligne de niveau k la courbe obtenue par la section de la surface par le plan d'équation $z = k$.

INFO
La superposition, dans un même plan, des différentes lignes de niveau permet d'appréhender la surface originale.

EXEMPLE Soit $f(x\,;y) = -2x^2 + 3xy - 5y$.

La ligne de niveau $z = 20$ entre orange et bleu-foncé a pour équation $y = \dfrac{20 + 2x^2}{3x - 5}$ pour $x \neq \dfrac{5}{3}$.

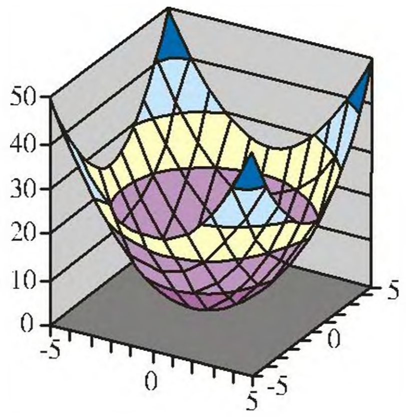


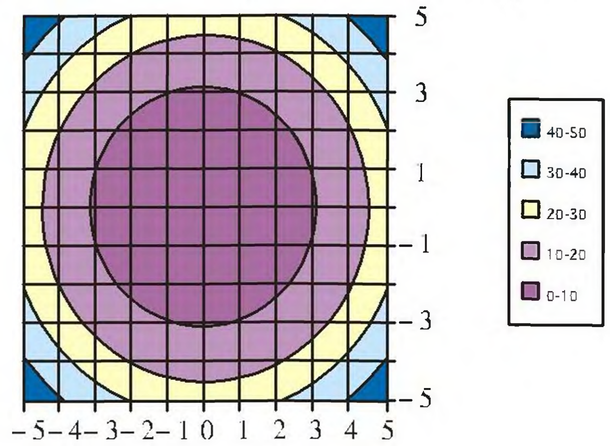


c. Paraboloïdes

Définition Une surface d'équation $z = k(\,x^2 + y^2)$, k réel, est appelée un **paraboloïde de révolution** d'axe Oz et de sommet O.

EXEMPLE On a représenté ci-dessous le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$.

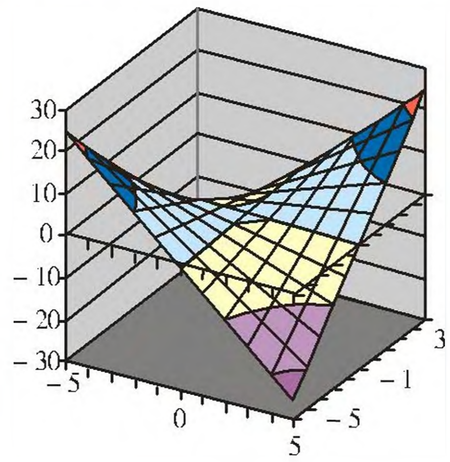


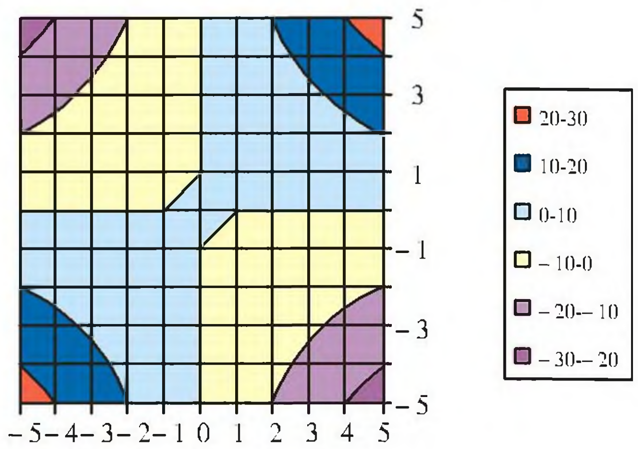


Propriétés • La section par un plan parallèle à l'axe (Oz) est une parabole.
• Les lignes de niveau sont des cercles.

Définition Une surface d'équation $z = kxy$, k réel, est appelée un **paraboloïde hyperbolique** d'axe Oz.

EXEMPLE On a représenté ci-dessous le paraboloïde d'équation $z = xy$.





Propriétés • La section par un plan parallèle à l'axe (Oz) est une parabole ou une droite.
• Les lignes de niveau non nulles sont des hyperboles.

Le cours en action

Rencontrer d'autres exemples

• La surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = 10 - x^2 - y^2$ est un paraboloïde de révolution.
Son intersection par le plan d'équation $x = 1$ est la parabole d'équation $z = 9 - y^2$.
• La surface d'équation $z = 2xy$ est un paraboloïde hyperbolique. La ligne de niveau $z = 4$ est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{2}{x}$.

Exercices 23 à 31

Déterminer une fonction de deux variables

ÉNONCÉ **1. Déterminer la fonction de deux variables qui donne le volume d'un réservoir constitué d'un cylindre de longueur l, fermé aux extrémités par deux demi sphères de rayon r.**
2. Le réservoir a un volume de 2000 litres. Quelle doit être la relation entre l et r ?

SOLUTION 1. On a $f(\ell ; r) = \pi \ell r^2 + \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

2. Il s'agit d'étudier la ligne de niveau $f(\ell ; r) = 2$ (en m³).
Or $f(\ell ; r) = 2$ est équivalent à $3r^2\ell + 4r^3 = \dfrac{6}{\pi}$.
On en déduit que $\ell = \dfrac{2}{\pi r^2} - \dfrac{4r}{3}$.

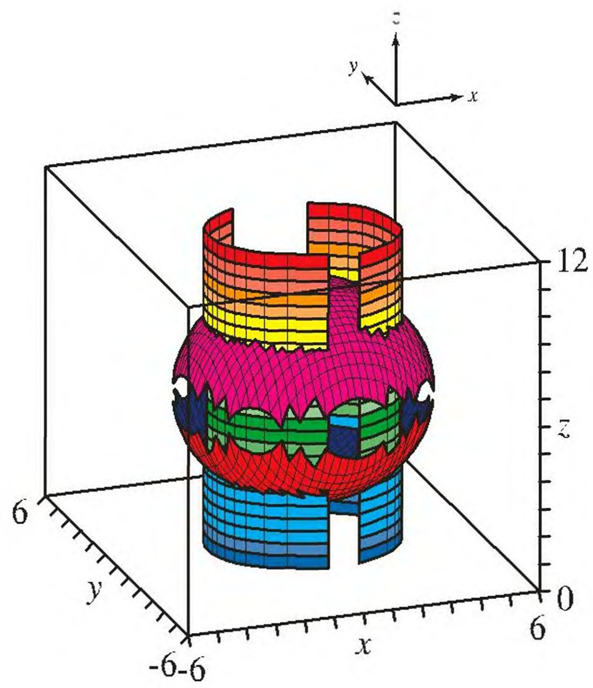
Exercices 23 à 31

1 Intersections avec un cylindre

OBJECTIF Étudier des intersections simples du cylindre.

ÉNONCÉ 1

Déterminer l'intersection de la sphère de centre $\Omega(0\,;0\,;6)$ et de rayon 4 et du cylindre d'axe (Oz) et de rayon 3.



SOLUTION

UNE MÉTHODE On résout le système de deux équations à trois inconnues.

Le cylindre a pour équation $x^2 + y^2 = 9$.
Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'intersection, on a

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-6)^2=16 \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z-6)^2=7 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=6+\sqrt{7} \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z=6-\sqrt{7} \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$

On traduit « ou » par « réunion ».

On obtient donc la réunion de deux cercles, l'un dans le plan d'équation $z=6+\sqrt{7}$, de centre $O_1(0\,;0\,;6+\sqrt{7})$ et de rayon 3 ; l'autre, dans le plan d'équation $z=6-\sqrt{7}$, de centre $O_2(0\,;0\,;6-\sqrt{7})$ et de rayon 3.

ÉNONCÉ 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 10$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - 5 = 0$.

1. Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe du cylindre.

2. Déterminer la distance entre le plan $\mathcal{P}$ et l'axe.
En déduire la nature de la section du cylindre par le plan $\mathcal{P}$.

3. Déterminer les équations de l'intersection.

SOLUTION

UNE MÉTHODE Pour étudier des positions relatives, utiliser un vecteur normal au plan.

1. L'axe du cylindre est l'axe des cotes (Oz).
Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $\vec{n}(2\,;1\,;0)$ et $\vec{n}\cdot\vec{k}=2\times0+1\times0+0\times1=0$, donc $\mathcal{P}$ est parallèle à (Oz).

2. La distance entre (Oz) et $\mathcal{P}$ est donc la distance entre O et $\mathcal{P}$, d'où $d(O,\mathcal{P})=\dfrac{|2\times0+1\times0-5|}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

La distance entre le plan et l'axe donne le nombre de droites d'intersection (voir le cours).

Comme le rayon du cylindre est 3, la section du cylindre par le plan $\mathcal{P}$ est la réunion de deux droites parallèles à l'axe (Oz).

3. L'intersection du cylindre avec le plan de base (xOy) est le cercle de centre O et de rayon 3.
Soit $M(x\,;y\,;0)$ un point de (xOy) commun au cylindre et à $\mathcal{P}$. On a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(5-2x)^2=10 \\ y=5-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-20x+15=0 \\ y=5-2x \end{cases}$$

L'équation du second degré d'inconnue x a pour solutions $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$, qui donnent $y_1 = -1$ et $y_2 = 3$. Les points d'intersection dans le plan de base sont $M_1(3\,;-1\,;0)$ et $M_2(1\,;3\,;0)$.
La section du cylindre par le plan $\mathcal{P}$ est donc la réunion des droites passant par les points M_1 et M_2 et de vecteur directeur $\vec{k}$.

Le cours, partie 1

2 Section d'un cylindre par un plan

OBJECTIF **Utiliser un changement de repère.**

ÉNONCÉ

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y - \sqrt{3}z = 0$.

1. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0;\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0;\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

a. Démontrez que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires, qu'ils sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à $\vec{i}$. Que peut-on en déduire pour le repère $(O;\vec{i},\vec{u},\vec{v})$?

b. Démontrez que $\vec{i}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$.

2. a. Démontrez que si les coordonnées de M sont $(x ; y ; z)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(X ; Y ; Z)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{u},\vec{v})$, on a $\begin{cases} x = X \\ y = \dfrac{Y\sqrt{3}+Z}{2} \\ z = \dfrac{Y - Z\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

b. Démontrer que si M est un point de l'intersection de $\mathcal{P}$ et du cylindre, alors on a $Z = 0$ et $\dfrac{X^2}{3} + \dfrac{Y^2}{4} = \dfrac{4}{3}$.

SOLUTION

UNE MÉTHODE Pour connaître la nature de l'intersection d'un cylindre et d'un plan non perpendiculaire à l'axe, on change de repère.

1. a. $\|\vec{u}\| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3+1}{4}} = 1$, de même $\|\vec{v}\| = 1$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires.

On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0\times 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{-\sqrt{3}}{4} = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux entre eux et leur première coordonnée étant nulle, ils sont manifestement orthogonaux à $\vec{i}$. On peut en déduire que le repère $(O;\vec{i},\vec{u},\vec{v})$ est orthonormal.

b. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n}(0;1;-\sqrt{3})$ et

$$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0\times 0 + 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} + -\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 .$$

Pour montrer qu'un vecteur est directeur d'un plan, on montre qu'il est orthogonal au vecteur normal de ce plan.

De plus, $\vec{n}\cdot\vec{i} = 0$, donc les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{u}$, qui ne sont pas colinéaires, sont deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

2. a. Soit un point M de coordonnées $(X ; Y ; Z)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{u},\vec{v})$, alors

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{u} + Z\vec{v} = X\vec{i} + Y(0\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}) + Z(0\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\vec{k}),$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{OM} = X\vec{i} + (Y\frac{\sqrt{3}}{2} + Z\frac{1}{2})\vec{j} + (Y\frac{1}{2} + Z\frac{-\sqrt{3}}{2})\vec{k} = X\vec{i} + \frac{Y\sqrt{3}+Z}{2}\vec{j} + \frac{Y - Z\sqrt{3}}{2}\vec{k}.$$

Or, on a aussi $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, et comme les coordonnées sont uniques, on en déduit le système suivant : $\begin{cases} x = X \\ y = \dfrac{Y\sqrt{3}+Z}{2} \\ z = \dfrac{Y - Z\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

b. • Comme M est un point de $\mathcal{P}$ on a $y - \sqrt{3}z = 0$, d'où $\dfrac{Y\sqrt{3}+Z}{2} - \sqrt{3}\times\dfrac{Y - Z\sqrt{3}}{2} = 0$, donc $\dfrac{Y\sqrt{3}+Z-Y\sqrt{3}+3Z}{2} = 0$, d'où $2Z = 0$ et finalement $Z = 0$.

• Comme M est un point du cylindre on a $x^2 + y^2 = 4$, d'où $X^2 + \left(\dfrac{Y\sqrt{3}+Z}{2}\right)^2 = 4$.

Or $Z = 0$, donc $X^2 + \dfrac{3Y^2}{4} = 4$, d'où $\dfrac{X^2}{3} + \dfrac{Y^2}{4} = \dfrac{4}{3}$.

Le cours, partie 1

3 Section d'un cône par un plan

OBJECTIF Étudier l'intersection d'un cône et d'un plan parallèle à son axe.

ÉNONCÉ

Soit le cône d'équation $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{2}$.

1. Déterminer une équation de la courbe représentative Γ de l'intersection du cône par le plan d'équation $y = 3$.

2. Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \sqrt{2x^2 + 18}$.

a. Démontrer que la fonction f est paire.

b. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ;+\infty[$ et donner ses limites.

c. Démontrer que la droite d'équation $y = \sqrt{2}x$ est asymptote oblique à la représentation graphique de la fonction f en $+\infty$ dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{k})$, avec $A(0 ; 3 ; 0)$.

d. En déduire la représentation graphique de la fonction f sur ℝ.

3. Quel est le lien entre la courbe représentative de f et celle de Γ ?
En déduire la courbe Γ.

UNE MÉTHODE Étudier une fonction pour obtenir une courbe.

SOLUTION

1. Pour $y = 3$, on obtient $2x^2 + 18 = z^2$.

2. a. Pour tout x de ℝ, $f(-x) = \sqrt{2(-x)^2 + 18} = \sqrt{2x^2 + 18} = f(x)$, donc f est paire.

b. $f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 18}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 18}}$.

f' est du signe de $2x$, donc f est croissante sur $[0 ;+\infty[$, De plus, $f(0) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$\lim_{x \to +\infty} 2x^2 + 18 = +\infty$ et $\lim_{u \to +\infty} \sqrt{u} = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Comme f est paire, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

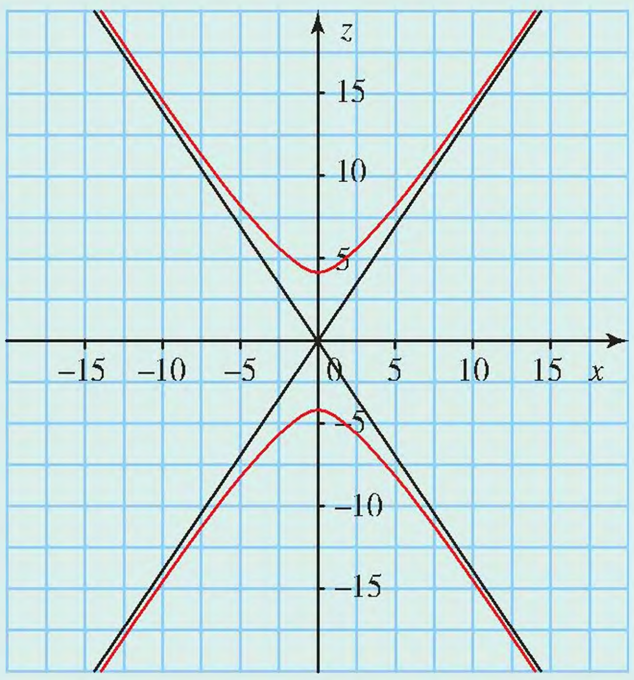
c. $f(x) - \sqrt{2}x = \sqrt{2x^2 + 18} - \sqrt{2}x = \frac{2x^2 + 18 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 18} + \sqrt{2}x} = \frac{18}{\sqrt{2x^2 + 18} + \sqrt{2}x}$.

Or $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 + 18} + \sqrt{2}x = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \sqrt{2}x = 0$ et la droite d'équation $y = \sqrt{2}x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

d. Par symétrie par rapport à l'axe vertical de la représentation, on obtient la courbe complète de f.

3. À la question **1.**, on avait $z^2 = 2x^2 + 18$, ce qui est équivalent à $z = \sqrt{2x^2 + 18}$ ou $z = -\sqrt{2x^2 + 18}$, c'est-à-dire $z = f(x)$ ou $z = -f(x)$.

Il convient donc de se placer dans le plan d'équation $y = 3$, muni du repère $(A ; \vec{i}, \vec{k})$ avec $A(0 ; 3 ; 0)$.
La courbe Γ est la réunion de deux courbes représentatives : celle de f et celle de $-f$, obtenue à partir de la première par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Les droites asymptotes dans le plan d'équation $y = 3$, sont parallèles aux génératrices du cône du plan d'équation $y = 0$.

Le cours, partie 1

TD 1 Section d'un cône par un plan non orthogonal à son axe

OBJECTIF
Déterminer la nature de la section plane d'un cône.

Soit un cône d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = z^2$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y - 2z + 2 = 0$ dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On pose $\vec{u} = 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{k} - \vec{j}$ et soit A le point de coordonnées $\left(0\,;\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$.

a. Démontrer que le repère $(A\,;\vec{i},\vec{u},\vec{v})$ est orthogonal et que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

Ce changement de repère transforme $\mathcal{P}$ en plan de base.

2. Soit le point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(X\,;Y\,;Z)$ dans le repère $(A\,;\vec{i},\vec{u},\vec{v})$.

Rappeler que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA}$ et en déduire que $\begin{cases} x = X \\ y = 2Y - Z + \dfrac{2}{3} \\ z = Y + 2Z + \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Ce système est caractéristique du changement de repère.

3. On suppose que le point M appartient à l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du cône.

a. En déduire que $Z = 0$.

b. En déduire que l'intersection du cône et du plan est la courbe $\mathcal{C}$ dont l'équation dans le plan $\mathcal{P}$ est $X^2 + 3Y^2 = \dfrac{4}{3}$.

4. Déterminer les coordonnées des quatre points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes $(A\,;\vec{i})$ et $(A\,;\vec{u})$, puis tracer sommairement la courbe $\mathcal{C}$ (on prendra 4 cm pour unité).

TD 2 Une surface particulière

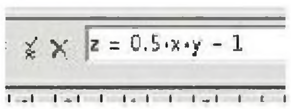
TICE

OBJECTIF
Représenter une surface avec un logiciel de géométrie 3D.

Soit la surface $\mathcal{S}$ définie par $z = \dfrac{1}{2}xy - 1$

1. a. Représenter la surface $\mathcal{S}$.

Par exemple, avec Derive 6 :
- Introduire l'équation dans la fenêtre de saisie.



- Utiliser l'icône graphe 3D  deux fois.
- Demander l'affichage des axes : clic-droit de la souris puis option.

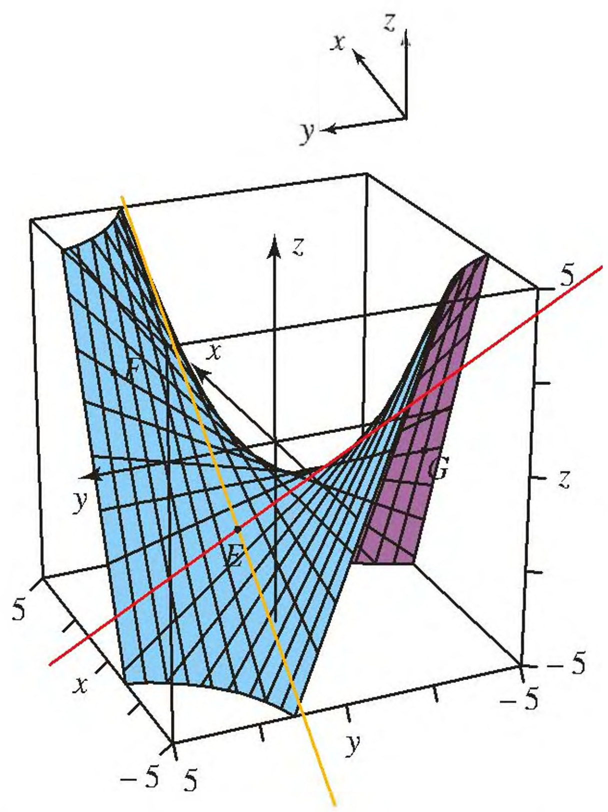
Les lignes en noir sur la surface sont les points qui ont soit la même abscisse, soit la même ordonnée.

b. Les points $A(2\,;1\,;0)$, $B(2\,;0{,}5\,;-1)$, $C(-3\,;-2\,;2)$ appartiennent-ils à $\mathcal{S}$?

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{S}$ avec les axes.

3. a. Que représente la droite de $\mathcal{S}$ en rouge page suivante sur le graphique ? Et la droite en jaune ?

b. Par lecture graphique, quelles sont les coordonnées du point E de la surface $\mathcal{S}$?
Et celles du point F et du point G ?



4. a. Montrer que les points $H(4\,;-3\,;-7)$ et $K(-3\,;4\,;-7)$ sont deux points de la surface $\mathcal{S}$.

b. Quelle est la particularité des points $M(x\,;y\,;z)$ et $N(y\,;x\,;z)$ de $\mathcal{S}$?

c. Quelle est la particularité de la surface $\mathcal{S}$?

TD 3 Le paraboloïde de révolution

TICE

OBJECTIF Représenter une surface avec un logiciel de géométrie 3D.

Soit la surface, d'équation $z = x^2 + y^2$, appelée un paraboloïde de révolution.

A Représentation

1. Faire la représentation graphique de la surface.

Par exemple, avec le tableur Excel :

• Mettre en première ligne la valeur de x de – 5 à 5 et en première colonne les valeurs de y de – 5 à 5.

• Entrer la formule de z en B2 et recopier dans le tableau.

Pour la représentation du paraboloïde d'équation $z^2 = x^2 + y^2$:

• Sélectionner avec la souris en cliquant-glissant les cellules à représenter, puis utiliser les commandes : Insertion/Graphique.

• Dans la boite de dialogue choisir comme type de diagramme : Surface, puis Terminer.

B2 ▾ fx =B1^2+A2^2

	A	B	C
1		-5	-4
2	-5	50	41
3	-4	41	32

2. Quel est l'axe de symétrie de cette surface ?

3. Quelle est l'intersection de cette surface :

a. Avec le plan d'équation $y = 2$?

b. Avec le plan d'équation $z = 4$?

B Volume du paraboloïde de $z = 0$ à $z = 2$

1. On coupe le paraboloïde en deux à la cote $z = 1$.

a. Quel est le volume du cylindre qui contient le paraboloïde entre les hauteurs $z = 0$ et $z = 1$?

b. Et entre les hauteurs $z = 1$ et $z = 2$?

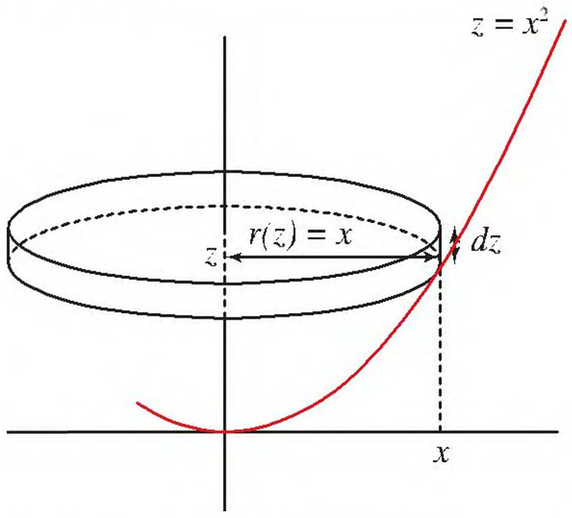
c. Déterminer un encadrement du volume du paraboloïde entre $z = 0$ et $z = 2$.

2. a. On partage le volume du paraboloïde de $z = 0$ à $z = 2$ en 100 « tranches » assimilables à des cylindres de même hauteur.
On appelle n le numéro de la tranche, z_n sa cote, r_n son rayon et v_n son volume.
À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, calculer une valeur approchée du volume.
On donne ci-dessous les trois premières lignes du tableau.

PI ▾ ✗ ✓ fx =Somme(D2:D101)

	A	B	C	D	E
1	n	zn	rn	vn	Volume
2	1	0	0	0	=Somme(D2:D101)
3	2	0,02	0,14142	0,001257	

b. On découpe le solide de révolution en « tranches » d'épaisseur dz de forme pseudo-cylindrique de rayon $r(z)$ et de hauteur dz.



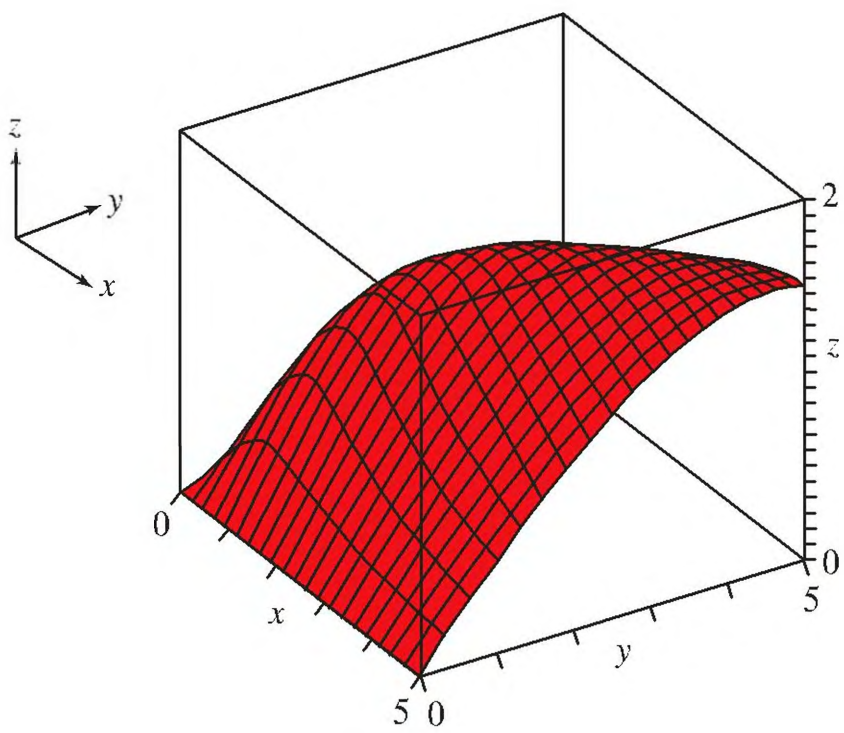
On rappelle qu'alors le volume entre les valeurs z_1 et z_2 est obtenu par $V = \int_{z_1}^{z_2} \pi r(z)^2\, dz$.
En déduire le volume exact du paraboloïde.

TD 4 Plan tangent à une surface

TICE

OBJECTIF Étudier une fonction de deux variables et définir un plan tangent à sa surface représentative.

Soit la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = \dfrac{3xy}{x^2 + y^2 + 1}$, représentée ci-dessous pour x et y compris entre 0 et 5.



1. Vérifier que le point $A(1\,;2\,;1)$ est un point de $\mathcal{S}$.

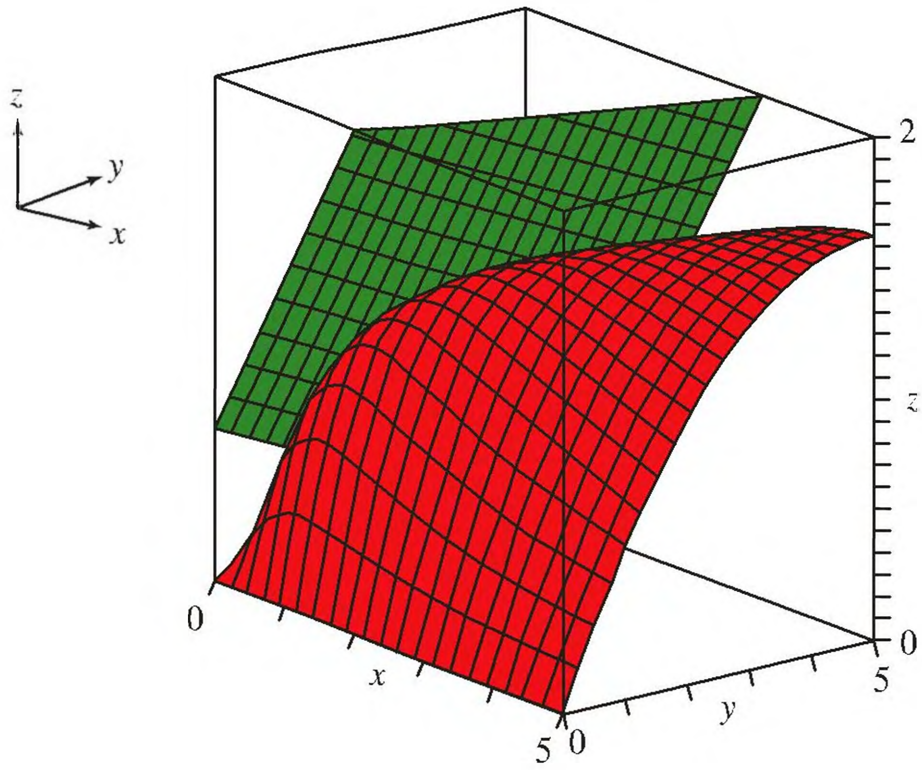
2. Soit la fonction f définie par $f(x\,;y) = z$.

a. Déterminer l'expression des deux fonctions g_2 et h_1 définies par $g_2(x) = f(x\,;2)$ et $h_1(y) = f(1\,;y)$.

b. Que représente la fonction g_2 dans le plan d'équation $y = 2$? Et la fonction h_1 ?

c. Déterminer les fonctions dérivées $h_1'(y)$ et $g_2'(x)$. Montrez que $g'_2(1) = \dfrac{2}{3}$ et $h'_1(2) = -\dfrac{1}{6}$.

3. On admettra que le plan tangent au point de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$ a pour équation $z - c = g'_b(a)(x - a) + h'_a(b)(y - b)$ où $g_b(x) = f(x\,;\,b)$ et $h_a(y) = f(a\,;\,y)$.
Déterminer une équation du plan tangent au point $A(1\,;\,2\,;\,1)$.



TD 5 Détermination de l'axe d'un cône de révolution

OBJECTIF Déterminer les éléments caractéristiques d'un cône de révolution dont l'axe n'est pas (Oz).

On admet que (E) : $16x^2 - 9y^2 - 30xz + 90z - 144 = 0$ est l'équation d'un cône de révolution dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

1. Démontrer que la droite g d'équations $x = 3$ et $y = 0$ est une droite de ce cône, puis démontrer que l'intersection du cône avec le plan d'équation $y = 0$ est constituée par la droite g et une droite g' dont on donnera des équations.
En déduire les coordonnées du sommet S du cône.

2. Déterminer une équation de l'intersection $\mathcal{H}$ du cône avec le plan d'équation $z = 0$ ($\mathcal{H}$ est une hyperbole que l'on ne demande pas de tracer).
Calculer les coordonnées des points B et C de $\mathcal{H}$ d'abscisse égale à 6.

3. On considère les trois génératrices du cône g, (SB) et (SC).
Calculer les distances SB et SC et calculer les coordonnées du point A de g, de cote négative ($z_A < 0$) tel que $SA = \dfrac{41}{5}$.

4. Déterminer une équation du plan (ABC).
Que représente la droite Δ qui passe par S et est perpendiculaire à ce plan ?
Tracer dans le plan d'équation $y = 0$ les droites g, g' et Δ.
Déterminer l'angle du cône.

5. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $5x - 3z = 30$.
Démontrer que les points communs de ce plan et du cône sont sur la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 10z - 84 = 0$ et que cette sphère passe par A, B et C.
Quelle est la nature de l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du cône ?

Culture et mathématiques p. 104

Application

Cylindres

Cours partie 1

1 **1.** Déterminer une équation du cylindre d'axe (Oz) passant par le point $A(1\,;2\,;6)$.

2. Déterminer une équation du cylindre d'axe (Ox) passant par le point $C(2\,;-1\,;2)$.

3. Déterminer une équation du cylindre de rayon 2 et dont l'axe, parallèle à (Oz), passe par le point $B(2\,;3\,;0)$.

2 **1.** Quelle est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 9$?

2. Démontrer que le plan (xOz) est un plan de symétrie.

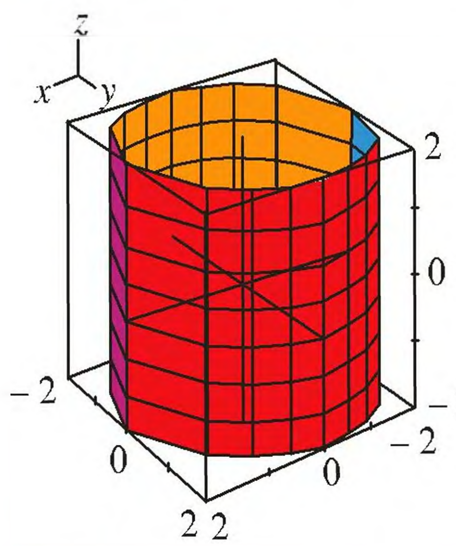
3 Déterminer une équation du cylindre d'axe (Oz) tel que son intersection avec le plan d'équation $y = 3$ soit la réunion des droites d'équation $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$ et $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$

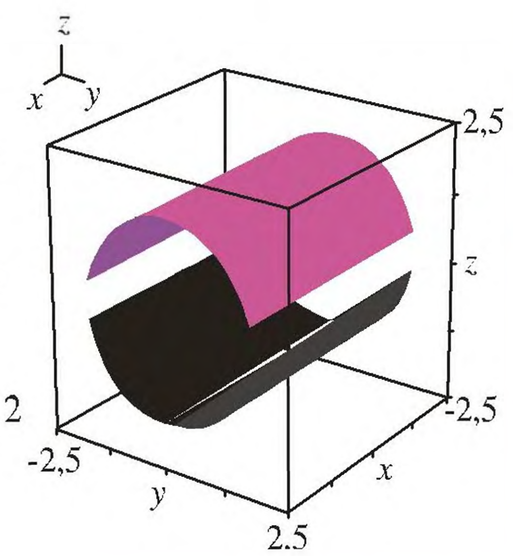
4 Déterminer une équation du cylindre d'axe (Oz) dont l'intersection avec le plan d'équation $x = 2$ est la réunion des droites d'équations $\begin{cases} x=2 \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ et $\begin{cases} x=2 \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$

5 Soit le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 13$.
Les points suivants appartiennent-ils à ce cylindre ?
$A(1\,;2\,;-3)$; $B(0\,;-2\,;3)$ et $C(1\,;2\sqrt{3}\,;-4)$.

6 On donne la droite D passant par le point $A(2\,;-3\,;0)$ et parallèle à l'axe (Oz). Déterminer l'ensemble des points dont la distance à D est égale à 12.

7 Donner une équation de chaque cylindre représenté ci-dessous :





8 On considère le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 16$.
Déterminer les intersections respectives de ce cylindre avec les plans d'équations suivants :

a. $x = 2$ **b.** $x = 6$ **c.** $y = -3$ **d.** $z = 2$

9 Soit le cylindre d'axe (Oz) et de rayon 5.
Déterminer son intersection avec la droite définie par les points $A(1\,;2\,;3)$ et $B(2\,;-1\,;1)$.

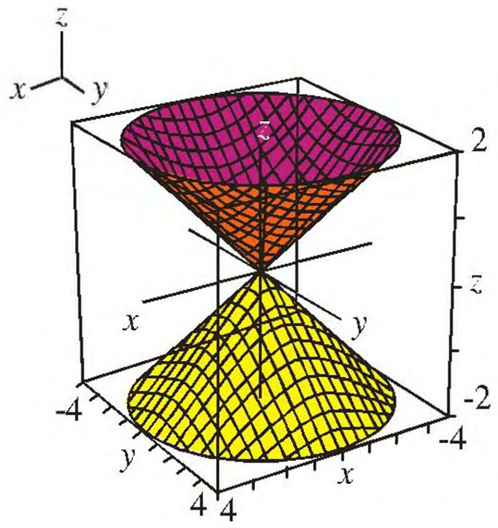
Cônes

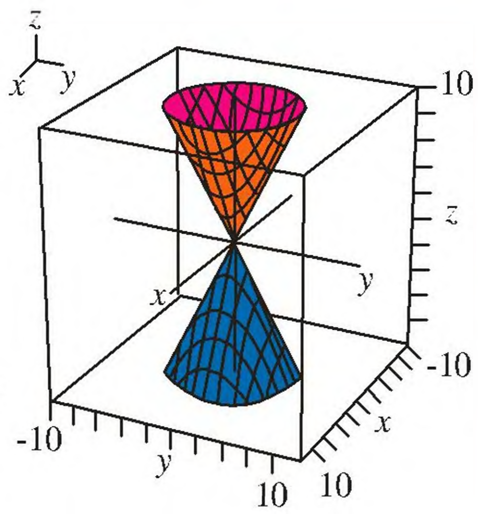
Cours partie 1

10 Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet O, passant par le point $A(-2\,;3\,;1)$.

11 Déterminer une équation du cône de sommet O, d'axe (Ox) et passant par le point $A(-1\,;\sqrt{2}\,;2)$.

12 Déterminer une équation de chacun des cônes ci-dessous :





13 Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet O et dont le cercle d'intersection avec le plan d'équation $z = 4$ a pour rayon 3.

14 **1.** Déterminer une équation du cône d'axe (Oz) de sommet $S(0\,;0\,;4)$, passant par le point $A(\sqrt{3}\,;1\,;0)$.

2. Pour quelles valeurs de k, l'intersection de ce cône avec le plan d'équation $z = k$ est-elle un cercle de rayon 3 ?

15 Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet O et dont le demi-angle au sommet mesure $\frac{2\pi}{3}$ radians.

16 On considère le cône d'équation $x^2 + y^2 = 5z^2$.
Déterminer les intersections respectives de ce cylindre avec les plans d'équations suivantes :

a. $x = 2$ **b.** $x = -3$ **c.** $y = 2$ **d.** $z = 4$

17 **1.** Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet $S(0\,;0\,;2)$, passant par le point $A(1\,;3\,;4)$.

2. Déterminer le centre et le rayon de son cercle d'intersection avec le plan d'équation $z = 4$.

18 **1.** Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet $S(2\,;4\,;0)$, passant par le point $A(1\,;3\,;1)$.

2. Déterminer le centre et le rayon de son cercle d'intersection avec le plan d'équation $z = 1$.

19 **1.** Déterminer une équation du cône d'axe (Oy), de sommet $S(0\,;-3\,;0)$, passant par le point $A(1\,;0\,;3)$.

2. Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'intersection de ce cône avec le plan (yOz), déterminer z en fonction de y.

Application

Cylindres

Cours partie 1

1 **1.** Déterminer une équation du cylindre d'axe (Oz) passant par le point $A(1\,;2\,;6)$.

2. Déterminer une équation du cylindre d'axe (Ox) passant par le point $C(2\,;-1\,;2)$.

3. Déterminer une équation du cylindre de rayon 2 et dont l'axe, parallèle à (Oz), passe par le point $B(2\,;3\,;0)$.

2 **1.** Quelle est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 9$?

2. Démontrer que le plan (xOz) est un plan de symétrie.

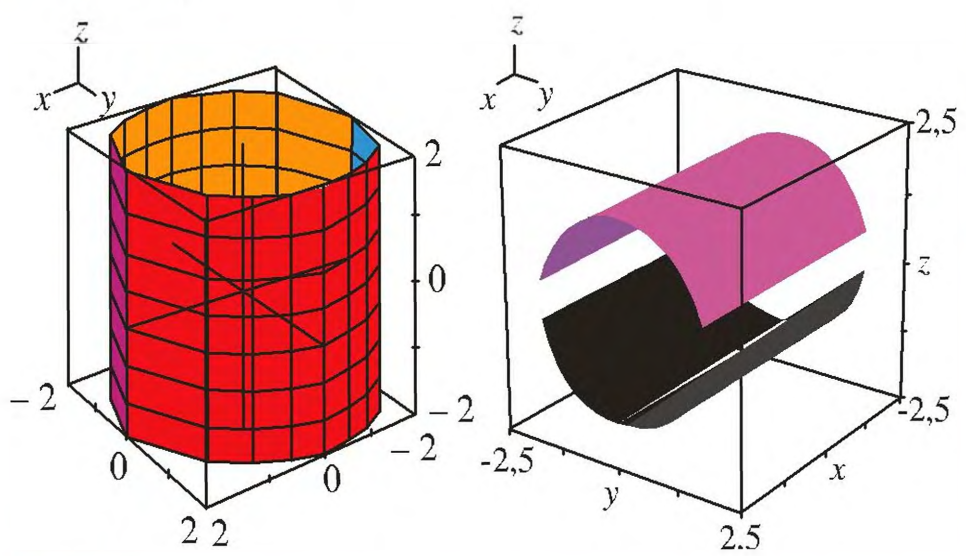
3 Déterminer une équation du cylindre d'axe (Oz) tel que son intersection avec le plan d'équation $y = 3$ soit la réunion des droites d'équation $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

4 Déterminer une équation du cylindre d'axe (Oz) dont l'intersection avec le plan d'équation $x = 2$ est la réunion des droites d'équations $\begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{5} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{5} \end{cases}$

5 Soit le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 13$.
Les points suivants appartiennent-ils à ce cylindre ?
$A(1\,;2\,;-3)$; $B(0\,;-2\,;3)$ et $C(1\,;2\sqrt{3}\,;-4)$.

6 On donne la droite D passant par le point $A(2\,;-3\,;0)$ et parallèle à l'axe (Oz). Déterminer l'ensemble des points dont la distance à D est égale à 12.

7 Donner une équation de chaque cylindre représenté ci-dessous :



8 On considère le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 16$.
Déterminer les intersections respectives de ce cylindre avec les plans d'équations suivants :

a. $x = 2$ **b.** $x = 6$ **c.** $y = -3$ **d.** $z = 2$

9 Soit le cylindre d'axe (Oz) et de rayon 5.
Déterminer son intersection avec la droite définie par les points $A(1\,;2\,;3)$ et $B(2\,;-1\,;1)$.

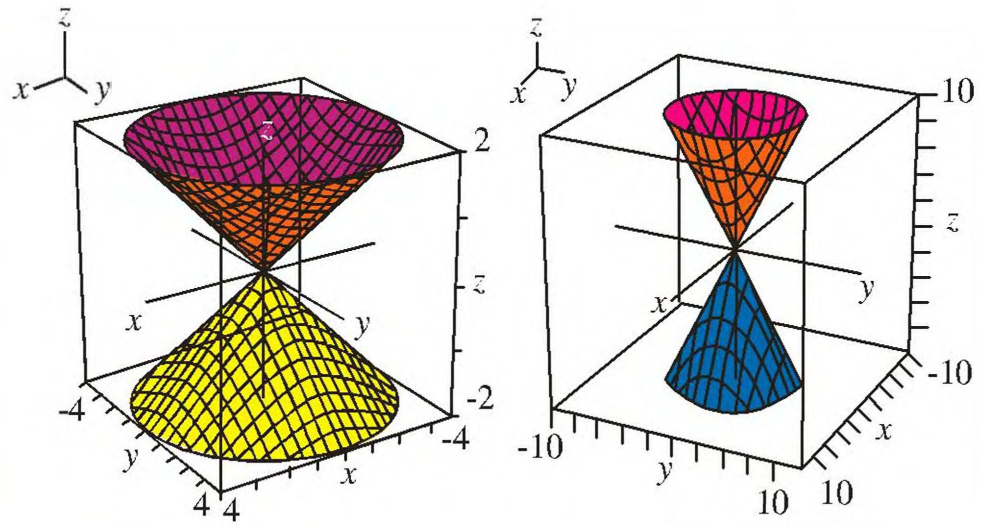
Cônes

Cours partie 1

10 Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet O, passant par le point $A(-2\,;3\,;1)$.

11 Déterminer une équation du cône de sommet O, d'axe (Ox) et passant par le point $A(-1\,;\sqrt{2}\,;2)$.

12 Déterminer une équation de chacun des cônes ci-dessous :



13 Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet O et dont le cercle d'intersection avec le plan d'équation $z = 4$ a pour rayon 3.

14 **1.** Déterminer une équation du cône d'axe (Oz) de sommet $S(0\,;0\,;4)$, passant par le point $A(\sqrt{3}\,;1\,;0)$.

2. Pour quelles valeurs de k, l'intersection de ce cône avec le plan d'équation $z = k$ est-elle un cercle de rayon 3 ?

15 Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet O et dont le demi-angle au sommet mesure $\frac{2\pi}{3}$ radians.

16 On considère le cône d'équation $x^2 + y^2 = 5z^2$.
Déterminer les intersections respectives de ce cylindre avec les plans d'équations suivantes :

a. $x = 2$ **b.** $x = -3$ **c.** $y = 2$ **d.** $z = 4$

17 **1.** Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet $S(0\,;0\,;2)$, passant par le point $A(1\,;3\,;4)$.

2. Déterminer le centre et le rayon de son cercle d'intersection avec le plan d'équation $z = 4$.

18 **1.** Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet $S(2\,;4\,;0)$, passant par le point $A(1\,;3\,;1)$.

2. Déterminer le centre et le rayon de son cercle d'intersection avec le plan d'équation $z = 1$.

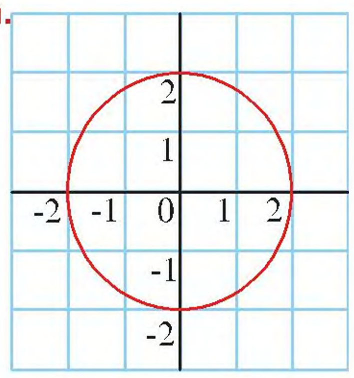
19 **1.** Déterminer une équation du cône d'axe (Oy), de sommet $S(0\,;-3\,;0)$, passant par le point $A(1\,;0\,;3)$.

2. Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'intersection de ce cône avec le plan (yOz), déterminer z en fonction de y.

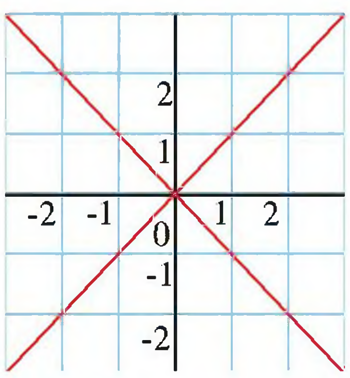
20 On donne le cône Γ d'équation $x^2 + y^2 = z^2$, trois plans avec leur équations respectives et les trois courbes obtenues par intersection du cône avec chacun de ces trois plans. Associer la courbe et le plan.

$\mathcal{P}_1 : x = 0$ $\mathcal{P}_2 : y = 1$ $\mathcal{P}_3 : z = 2$

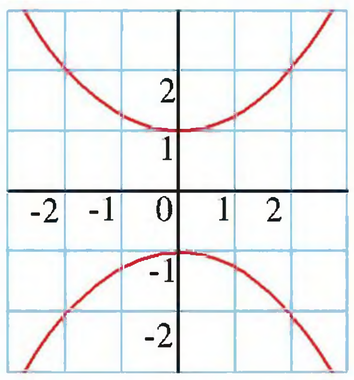
a.



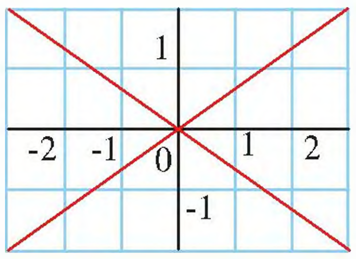
b.



c.



21 L'intersection d'une surface de révolution $\mathcal{S}$ d'axe (Oz) et du plan d'équation $x = 0$ donne la courbe représentée ci-dessous:



1. Quelle est l'équation possible de $\mathcal{S}$ parmi celles qui sont proposées :

a. $x^2 + y^2 = kz^2$ **b.** $x^2 + y^2 = kz$ **c.** $x^2 + y^2 = k$

2. Déterminer, à l'aide du graphique, la valeur du paramètre k.

22 Déterminer une équation du cône d'axe (Oz), de sommet O tel que son intersection avec le plan (yOz) soit la réunion des droites d'équations suivantes :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Fonctions de deux variables

Cours partie 2

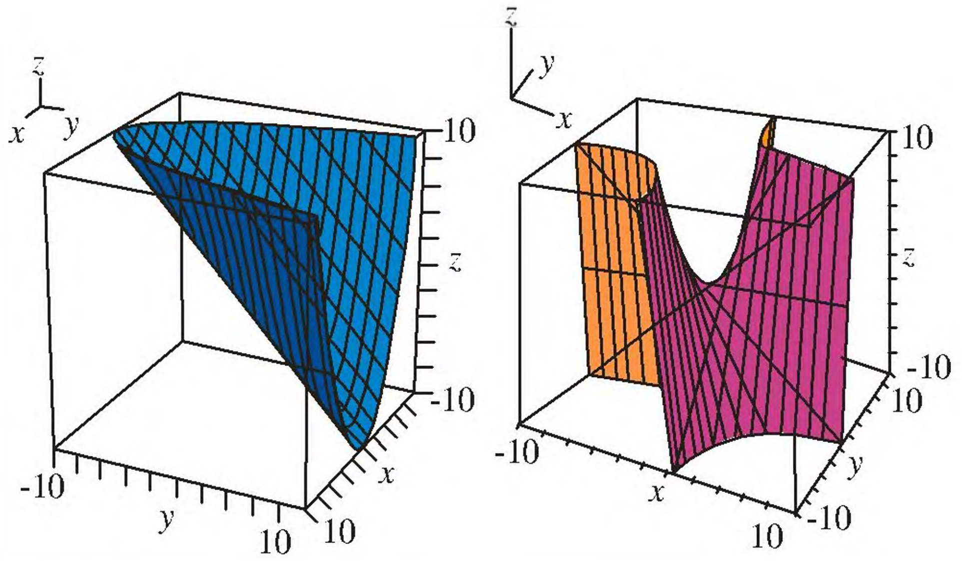
23 Soit la fonction f définie par $f(x ; y) = 4xy - 5x + 2y + 7$.

1. Calculer $f(1 ; 1)$; $f(-1 ; 2)$; $f(0{,}2 ; -5)$ et $f(-2 ; 1)$.

2. Quels sont, parmi les points suivants, ceux qui appartiennent à la surface représentative de f ?

$A(1 ; 1 ; 8)$; $B(-1 ; 2 ; 20)$; $C(2 ; -1 ; -20)$ et $D(\sqrt{3} ; \sqrt{12} ; 31 - 3\sqrt{3})$.

24 Retrouver la surface représentative des fonctions f et g définies par $f(x ; y) = \frac{1}{4}x^2 - y$ et $g(x ; y) = 4xy$.



25 Soit la fonction f définie par $f(x ; y) = 2x + 3y + 5$. Quelle est la surface représentant les solutions de l'équation $f(x ; y) = 3$?

26 La puissance d'une lentille semi convexe dans l'air, dont la matière a pour indice n et dont la surface sphérique a pour rayon de courbure r (en mètres) est donnée par $p(n, r) = \frac{n-1}{r}$.

1. Quelles considérations physiques permettent de réduire l'ensemble d'étude de la fonction p à $n \in]0 ; +\infty[$ et $r \in]0 ; +\infty[$?

AIDE Rechercher la définition de l'indice d'une matière transparente.

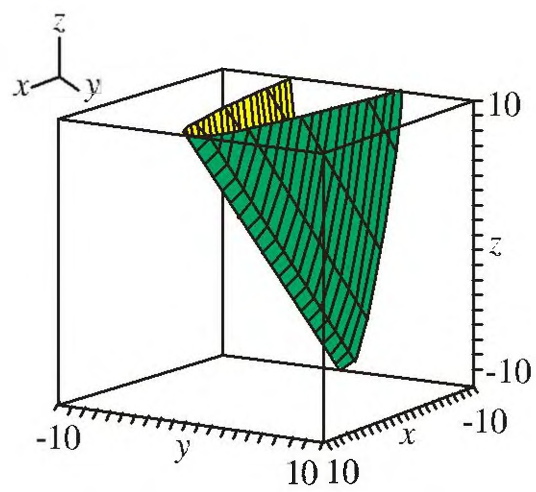
2. Quelle est la puissance d'une lentille d'indice 1,4 et de rayon de courbure 10 cm ?

3. On souhaite augmenter la puissance de la lentille de 0,5. Quel doit être le nouveau rayon de courbure si on utilise la même matière, donc si l'indice est conservé ?

4. Quelle doit être la valeur de l'indice pour une même augmentation de puissance si on ne peut pas modifier la géométrie de la lentille ?

5. Quelle doit être la relation entre n et r pour toutes les lentilles semi convexes de puissance 5 ?

www. **27** Soit la fonction f définie par $f(x ; y) = x + y^2$ représentée ci-dessous:



Quelle particularité présente la surface représentative de f ? Justifier.

28 Soit la fonction f définie par $f(x\,;y) = 2xy + 5y^2$.

1. Démontrer que, quels que soient les réels x et y,
$$f(-x\,;-y) = f(x\,;y).$$

2. Quelle particularité présente la surface représentative de f ?

29 Soit la fonction f définie par $f(x\,;y) = \dfrac{1}{x^2} + y$.

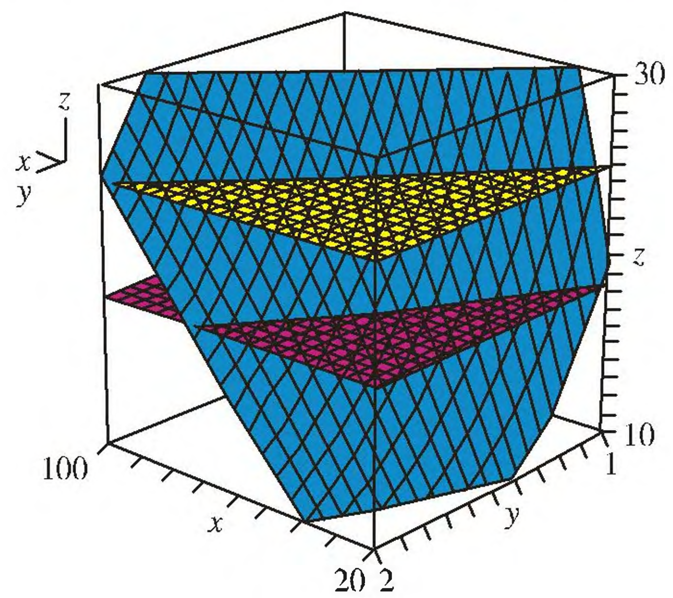
1. Pour quelles valeur de x la fonction f est-elle définie ?

2. a. Quel est le plan de symétrie de la surface représentative de f ?

b. Le démontrer.

30 Démontrer que le cône d'axe (Oz) de sommet $A(0\,;0\,;2)$ et de demi-angle $\dfrac{\pi}{3}$ est la réunion des surfaces représentatives des fonctions f et g définies par $f(x\,;y) = 2 + \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ et $g(x\,;y) = 2 - \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$.

31 Le statisticien belge Quételet définit au XIXe siècle l'indice I de masse corporelle par $I(p,t) = \dfrac{p}{t^2}$ où p est la masse en kilogrammes et t la taille en mètres.
La représentation graphique est donnée ci-dessous, ainsi que les deux plans correspondants aux lignes de niveaux $I = 18{,}5$ et $I = 24{,}9$, qui sont les valeurs admises par l'OMS comme bornes « normales » de l'indice de masse corporelle.



1. Déterminer la courbe représentative de l'indice en fonction de la taille pour un individu pesant 65 kilogrammes.

2. Déterminer les bornes de l'intervalle de masse pour un individu mesurant 1,7 mètres.

Paraboloïdes et autres surfaces

Cours partie 2

32 $\mathscr{S}$ est un paraboloïde d'équation $kz = x^2 + y^2$.
Déterminer si possible la valeur de k pour que les points suivants appartiennent à $\mathscr{S}$.

1. $A(1\,;2\,;3)$ **2.** $B(2\,;-1\,;2)$

3. $C(0\,;0\,;-2)$ **4.** $D(2\,;-2\,;0)$

33 $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z = x^2 + y^2$.

1. Déterminer l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $x = 2$.

2. Déterminer l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $y + 2z = 0$.

34 Soit la surface $\mathscr{S}$ définie par $z = \dfrac{y(9-x^2)}{10}$.

1. Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 2 et de cote 2 ?

2. Démontrer que le plan (yOz) est plan de symétrie de cette surface.

3. Quelle est la ligne de niveau $z = 0$?

35 **1.** Montrer qu'une équation de la sphère de centre $\Omega(2\,;0\,;0)$ et de rayon 1 est $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = -3$.

2. Quelle est son intersection avec le plan (xOy) ?

36 **1.** Quelle est la nature de la surface d'équation $x^2 + y^2 = 9 - z$?

2. Donner ses éléments caractéristiques.

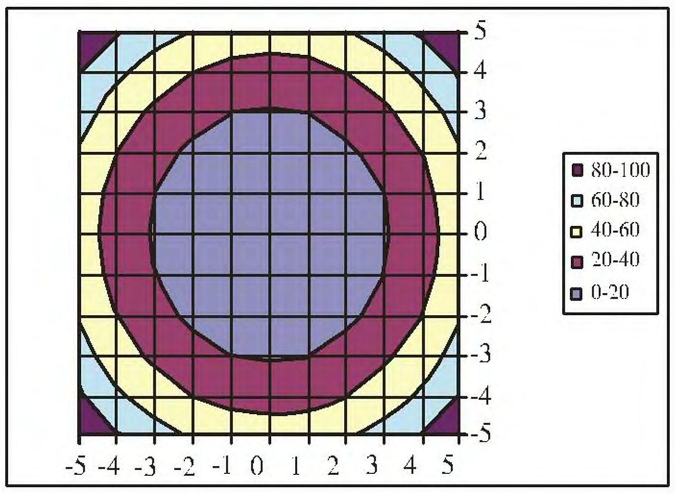
37 Soit la sphère $\mathscr{S}$ de centre $A(-2\,;2\,;1)$ et de rayon 4 et le plan d'équation $\mathscr{P} : 2x - 6y + 3z - 15 = 0$.

1. Déterminer la distance de A au plan $\mathscr{P}$.

2. En déduire la nature de l'intersection de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{P}$.

3. Donner les caractéristiques de cette courbe.

38 On donne ci-dessous les lignes de niveau d'une surface $\mathscr{S}$.



1. Quel type d'équation caractérise cette surface parmi celles proposées ?

a. $x^2 + y^2 = kz^2$ **b.** $x^2 + y^2 = kz$ **c.** $x^2 + y^2 = k$

2. Donner la valeur du réel k.

39 ★ On donne la courbe $\mathscr{C}$ définie dans le plan (xOz) par l'équation $z = e^x$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation autour de l'axe (Oz) de la courbe $\mathscr{C}$.

2. Déterminer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$.

40 ★ Soit les deux droites Δ et Δ' définies par
$$\Delta \begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta' \begin{cases} y = -x \\ z = -1 \end{cases}$$

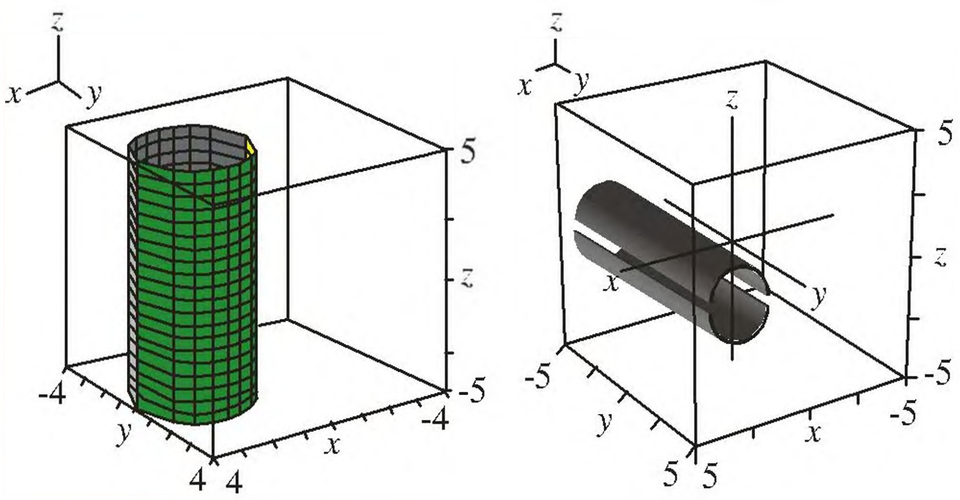
Démontrez que l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ équidistants des deux droites est la surface d'équation $z = \dfrac{-xy}{2}$.

Approfondissement

Cônes et cylindres

Cours partie 1

41 Donner les équations des cylindres suivants :



42 **1.** Dans le plan (xOy), soit Γ le cercle de centre $A(1\,;\,2)$ et de rayon 3. Donner une équation de Γ.

2. En déduire l'équation du cylindre d'axe parallèle à (Oz) et dont l'intersection avec le plan de base est le cercle Γ.

43 ★ Déterminer une équation du cône de sommet O et tangent à la sphère de centre $C(0\,;\,0\,;\,5)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

44 ★ Un cylindre et une sphère de centre $A(1\,;\,1\,;\,2)$ et de rayon 5 ont la même intersection par le plan d'équation $\mathcal{P} : y + 2z + 2 = 0$.

1. Déterminer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$, notée $d(A\,;\,\mathcal{P})$. En déduire la nature et les caractéristiques de leur intersection commune avec le plan.

2. Déterminer l'axe et le rayon du cylindre.

45 **Surface de révolution d'axe (Oz)**

On donne la courbe $\mathcal{C}$ définie dans le plan (xOz) par $z = x \sin x$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.

Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathcal{S}$ engendrée par la rotation autour de l'axe (Oz) de la courbe $\mathcal{C}$.

46 ★★ Soit le cône d'équation $x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{2}$.

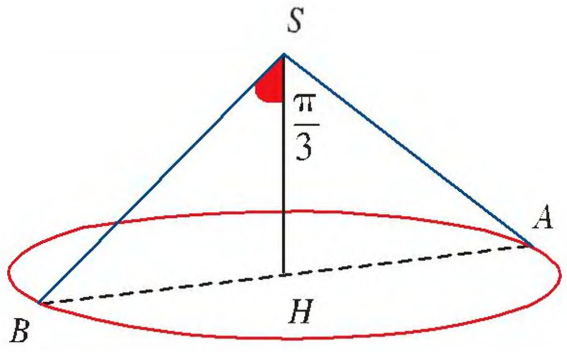
Démontrer que l'intersection de ce cône avec le plan d'équation $y = 3$ est une hyperbole dont une équation est $Z = -\dfrac{9}{4X}$.

AIDE On se placera dans le repère $(A\,;\vec{u}, \vec{j}, \vec{w})$ avec $A(0\,;\,3\,;\,0)$, $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} - \sqrt{2}\vec{k}$.

47 **Patron de cône et route loxodromique**

Soit un cône de hauteur 3 et de demi-angle $\widehat{HSB} = \dfrac{\pi}{3}$.

On appelle $\mathcal{C}$ son cercle de base. H est le centre du cercle $\mathcal{C}$.



1. Montrer que le patron de ce cône est une portion de disque de rayon 6 et d'angle $\pi\sqrt{3}$ radians.

2. Déterminer la longueur de l'arc AB sur le cercle $\mathcal{C}$.

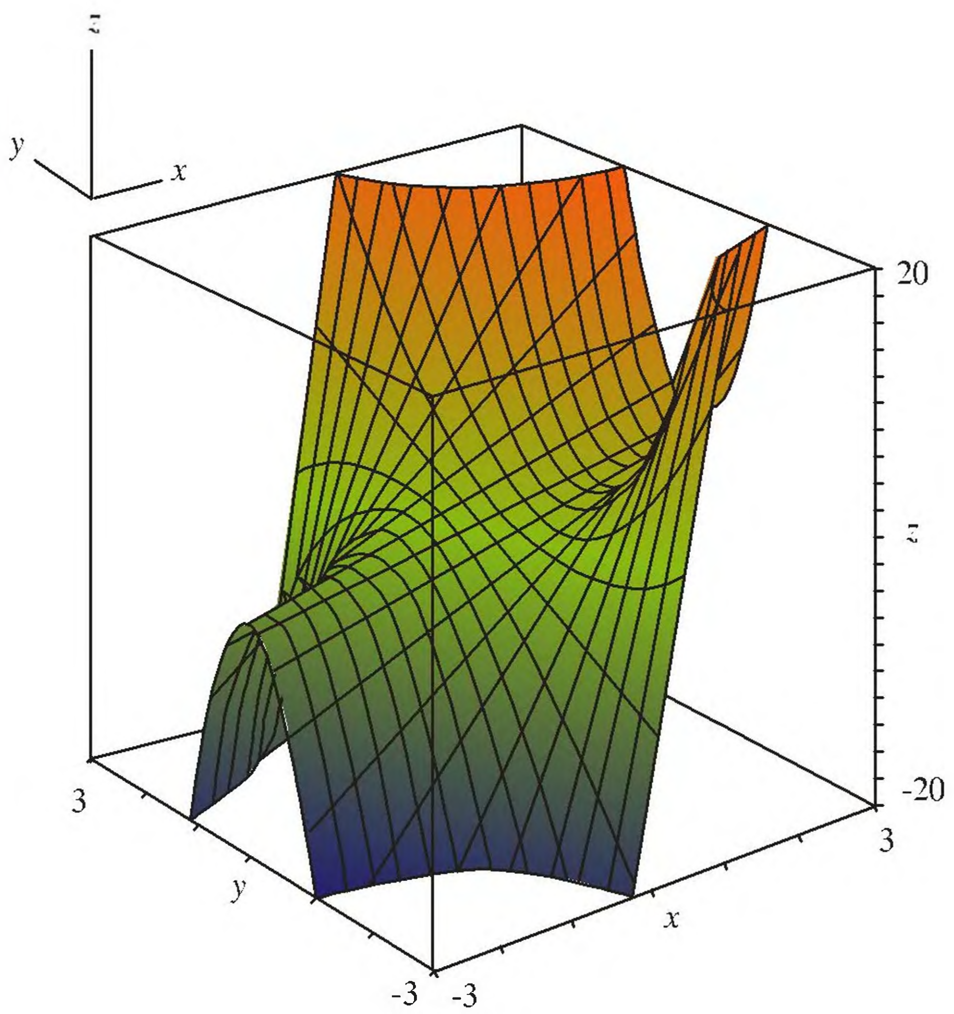
3. Une fourmi se promenant à vitesse constante passe en A au pied du cône et souhaite se rendre au point B.
Devra-t-elle suivre l'arc AB ou gagnera-t-elle du temps en passant par le sommet du cône ?

4. Peut-elle choisir un chemin encore plus court ?

Fonctions de deux variables et surfaces

Cours partie 2

48 Soit la fonction f définie par $f(x\,;\,y) = 4xy^2 + x + 3y$ dont la représentation est la surface ci-dessous.



1. On définit la fonction g_1 telle que $g_1(x) = f(x\,;\,1)$ et la fonction g_{-2} telle que $g_{-2}(x) = f(x\,;\,-2)$.

a. Déterminer les expressions de g_1 et g_{-2} en fonction de x.

b. Quelle est la représentation graphique de chacune de ces deux fonctions ?

c. Est-ce vrai pour n'importe quelle valeur de y ?
(On parle alors d'une surface réglée).

2. On définit la fonction h_{-1} telle que $h_{-1}(y) = f(-1\,;\,y)$.

a. Déterminer l'expression de h_{-1} en fonction de y.

b. Quelle est la nature de la courbe représentative ?

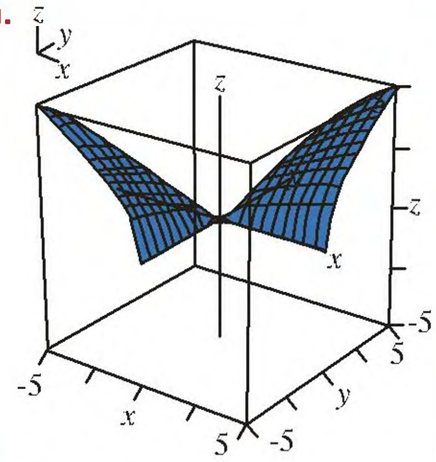
49 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.
Préciser sa représentation dans le plan (xOy).

1. $f(x\,;y)=\dfrac{xy}{x-2y+1}$ **2.** $h(x\,;y)=\sqrt{x^2-y^2}$

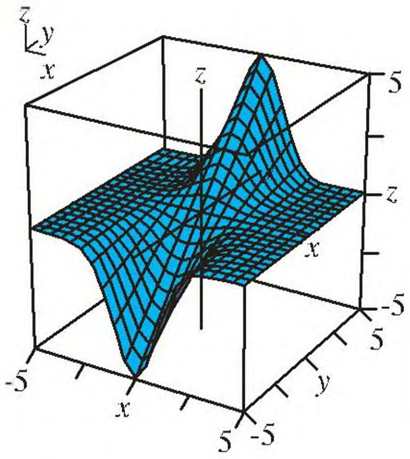
3. $g(x\,;y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-4}$

50 Associer à chaque représentation son équation correspondante :

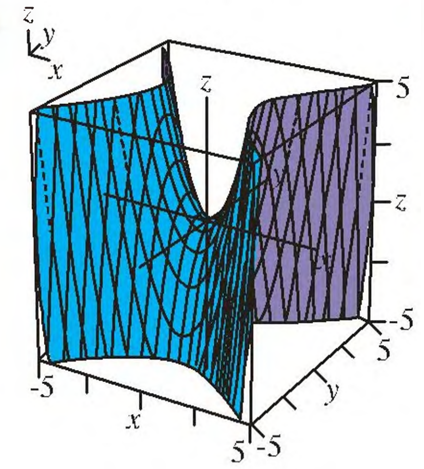
a.



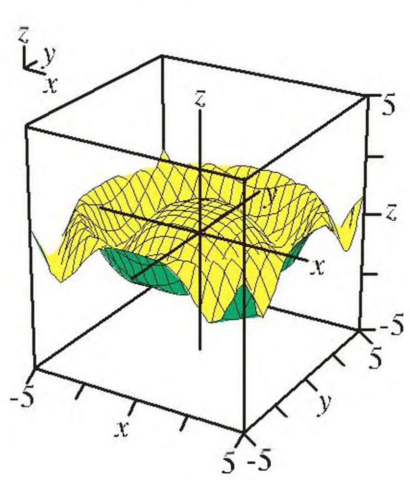
b.



c.



d.



1. $z=\cos\left(\dfrac{x^2+y^2}{4}\right)$ **2.** $z=\sqrt{xy}$

3. $z=x^2-y^2$ **4.** $z=ye^{\frac{-x^2}{2}}$

51 Soit la fonction f définie par $f(x\,;y)=\dfrac{xy}{x^2+1}$.

1. Comparer, quels que soient les réels x et y, $f(x\,;\,y)$ et $f(-x\,;-y)$.
Que peut-on en déduire pour sa surface représentative ?

2. Déterminer l'équation de la courbe de niveau 1.

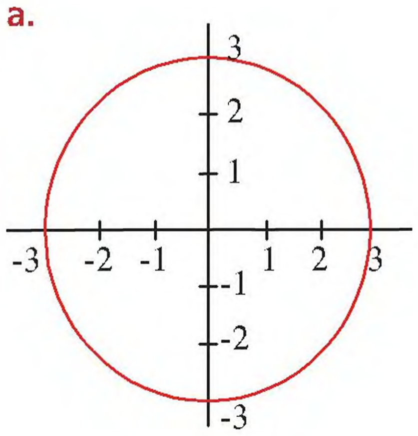
52 On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation

$$z=x^2+y^2-4.$$

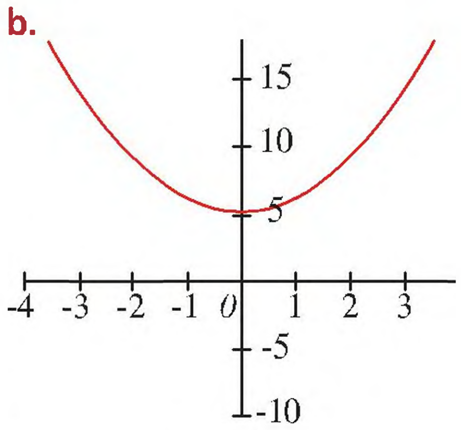
1. Quelle est sa nature ?

2. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux plans. $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (yOz) et $\mathcal{Q}$ parallèle au plan (xOy). On a représenté partiellement leur intersection avec $\mathcal{S}$:

a.



b.



Associer chaque figure au plan qui convient et déterminer une équation cartésienne de chacun des plans.

53 Les trois surfaces suivantes admettent chacune un plan de symétrie qui contient l'axe (Oz). Le déterminer.

$\mathcal{S}_1 : z=3x^2+2y\,;$ $\mathcal{S}_2 : z=x+2xy+y\,;$ $\mathcal{S}_3 : z=\dfrac{3x}{x^2+y^2}$.

54 VRAI OU FAUX ?

Justifier la réponse, soit par une démonstration si la proposition est exacte, soit par un contre-exemple si elle est fausse.
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $x^2+y^2=169$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x-y+4=0$.

1. $\mathcal{S}$ est le cercle de centre O de rayon 13.

2. La droite de vecteur directeur $\vec{k}$ passant par $A(5\,;12\,;10)$ est une génératrice de $\mathcal{S}$.

3. L'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}$ contient le point $B(2\sqrt{30}\,;7\,;2)$.

4. L'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}$ contient un nombre fini de points.

55 Soit la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z=x^2-y^2$.

1. Tracer la représentation graphique en utilisant un logiciel de représentation en trois dimensions, dans un repère orthonormal.

2. Soit un plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax+by+c=0$.

a. Quelle est la position relative de $\mathcal{P}$ par rapport à l'axe (Oz) ?

b. Discuter, suivant la valeur de a et de b, la nature de l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{S}$.

3. Soit un plan $\mathcal{Q}$ d'équation $z=k$.

a. Quelle est sa position relative par rapport à l'axe (Oz) ?

b. On suppose que $k>0$. Étudier la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2-k}$ et montrer que les droites d'équations $y=x$ et $y=-x$ sont asymptotes à sa courbe représentative.

c. Représenter la courbe intersection de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{S}$.

56 QCM

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z=2x-3xy+2$.

a. L'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan (yOz) est une droite parallèle à (Oy).

b. La droite passant par le point $A(1\,;2\,;1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;0\,;-4)$ est contenue dans la surface $\mathcal{S}$.

c. L'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $z=1$ est une droite.

2. On considère la surface $\mathcal{P}$ d'équation $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{25}=0$.

a. Le point $A(1\,;1\,;1)$ est un point de $\mathcal{P}$.

b. $\mathcal{P}$ est un cône d'axe (Ox).

c. L'intersection avec le plan (yOz) est la réunion de deux droites.

3. Soit la surface Δ d'équation $z=x^2\,e^{-xy}$.

a. Le plan d'équation $y=x$ est plan de symétrie de Δ.

b. L'intersection avec la droite définie par le point $B(1\,;2\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(1\,;0\,;1)$ est réduite à un point.

c. L'intersection avec le plan (xOz) est une parabole.

Problèmes

57 Volume d'un tas de sable calibré

1. Montrer que le tétraèdre joignant les centres de quatre boules identiques disposées en pyramide est un tétraèdre régulier.

2. Soit un tétraèdre régulier $ABCS$ et H le centre de la face ABC. Démontrer que $AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$ et que $HS = \sqrt{\frac{2}{3}}a$.

3. Soit le cône $\mathscr{C}$, de sommet $\mathscr{S}$, contenant les trois points A, B, C et α son demi-angle au sommet (angle entre son axe et une génératrice). Démontrer que $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Déduire des questions précédentes :

a. Que du sable calibré (c'est-à-dire dont les grains ont à peu près le même diamètre) tombant d'un élévateur forme un cône.

b. Que l'enveloppe d'un tas de sable de hauteur h est une partie du cône d'équation $x^2 + y^2 = \frac{(z-h)^2}{2}$.

c. Que le volume V d'un tas de sable calibré conique de hauteur h est $V = \frac{\pi h^3}{6}$.

58 ★ Fonctions de Coob-Douglas (1)

En économie, on utilise les fonctions de production dites de Coob-Douglas, définies par $f(x, y) = Ax^{\alpha} y^{\beta}$, où A, α et β sont trois réels positifs.

Ces fonctions définissent la quantité de biens produite par une entreprise en fonction de la quantité de travail, notée x, et la valeur des investissements, notée y.

1. Soit la fonction f définie par $f(x, y) = 10x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

Pour quelles valeurs de x et de y a-t-on une quantité produite égale à 10 ? (On appelle cela une courbe d'iso-production).

2. Une enquête auprès des consommateurs montre que, pour un prix de vente de 20, la production nécessaire sera égale à 1 000.

a. Déterminer la courbe d'iso-production correspondante.

b. Le coût de production étant déterminé par

$$C(x ; y) = 2x + 4y,$$

démontrer que le bénéfice de l'entreprise est défini par

$$B(x ; y) = 200x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 2x - 4y,$$

c. En supposant que l'usine produira la quantité 1 000 nécessaire, déterminer la valeur de x pour laquelle le bénéfice sera maximal et quel sera le montant des investissements nécessaires.

59 Fonctions de Coob-Douglas (2)

On donne, dans le tableau ci-dessous, les images par une fonction de production de Coob-Douglas de la forme $f(x,y) = Ax^{\alpha} y^{\beta}$ pour les valeurs de x de 0 à 6 et de y de 0 à 2.

y \ x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	3	12	27	48	75	108
2	0	12	48	108	192	300	432

1. Déterminer la valeurs des réels α et β.

2. Déterminer l'équation de la courbe d'iso-production 200.

60 Production d'une entreprise

La production journalière d'une entreprise dépend de deux facteurs : le travail de la main d'oeuvre et l'utilisation des machines.

On désigne :

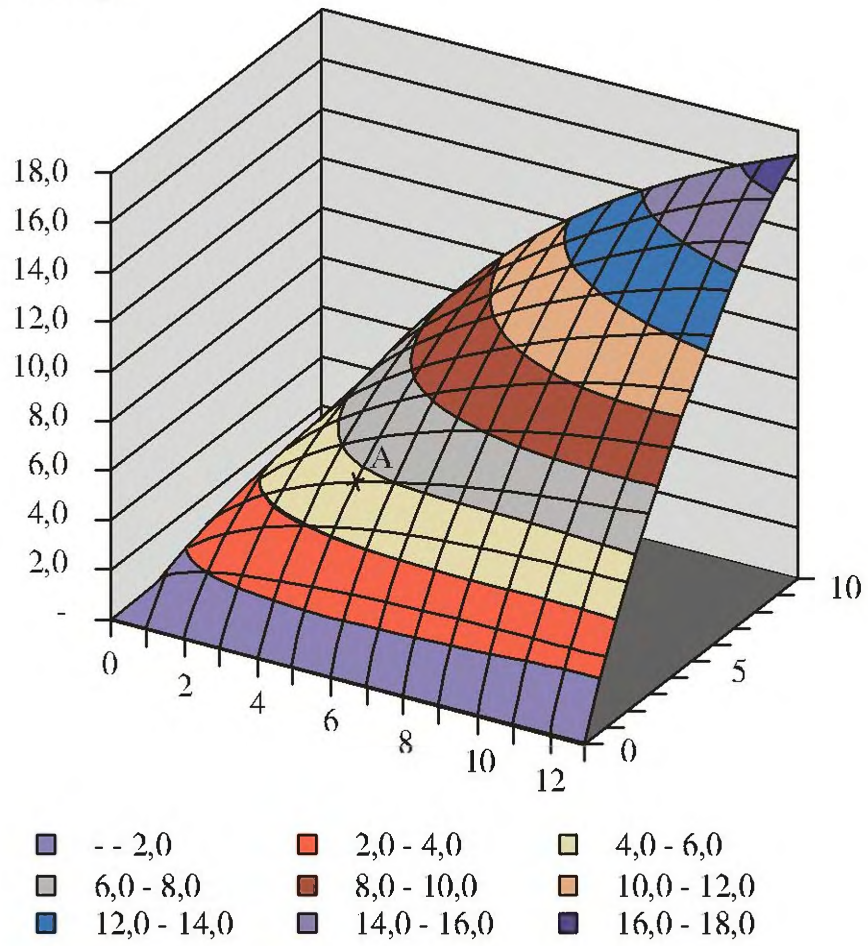
• par x la durée journalière de travail de la main d'oeuvre, exprimée en heures ; x appartient à l'intervalle $]0 ; 10]$,

• par y la durée journalière d'utilisation des machines, exprimée en heures ; y appartient à l'intervalle $]0 ; 12]$.

La quantité journalière produite (en tonnes) est donnée par la relation :

$$f(x ; y) = \frac{3xy}{x+y}, \text{ avec } 0 < x \leqslant 10 \text{ et } 0 < y \leqslant 12.$$

La figure suivante représente la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = f(x ; y)$.



Partie A

Le point A représenté par une croix est un point de la surface $\mathscr{S}$.

1. Déterminer graphiquement l'abscisse et la cote du point A. Calculer son ordonnée (arrondie au dixième).

2. Interpréter les résultats obtenus en référence à la production journalière de l'entreprise.

Partie B

Pour chaque heure, le coût total du travail s'élève à 4 milliers d'euros, et le coût d'utilisation des machines s'élève à 1 millier d'euros.

L'entreprise décide de dépenser 36 milliers d'euros par jour et cherche à maximiser sa production journalière sous cette contrainte. On a alors $4x + y = 36$.

La quantité journalière produite (en tonnes) sous cette contrainte de coût peut donc être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle]0 ; 10] par $g(x) = \dfrac{4x^2 - 36x}{x - 12}$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle]0 ; 10].

2. a. En déduire la durée journalière de travail et la durée journalière d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros.

b. Préciser la quantité journalière maximale produite en tonnes.

61 Points à coordonnées entières d'un cône

Soit le cône $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.

1. Soit deux entiers u et v tels que $u^2 + v^2 \equiv 0$ (3).
Démontrer que $u \equiv 0$ (3) et $v \equiv 0$ (3).

2. Soit M un point de $\mathscr{C}$, dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ sont des entiers strictement positifs.

a. Démontrer qu'il existe deux entiers strictement positifs x_1 et y_1 tels que $x = 3x_1$ et $y = 3y_1$.
En déduire qu'il existe un entier strictement positif z_1 tel que $z = 3z_1$.
Vérifier qu'alors $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, les entiers x, y et z sont divisibles par 3^n.

c. Conclure pour la valeur des entiers x, y et z.

3. Déterminer les points de $\mathscr{C}$ à coordonnés entières.

62 Volume d'un tonneau

• Les vignerons ont une formule pour déterminer le volume de leur tonneau. Elle est adaptée aux solides de révolution (tronc d'arbre...) et permet d'obtenir une bonne approximation du volume.

• Elle consiste à prendre la mesure de trois rayons : celui du bas r_a, un rayon intermédiaire, r_b, celui du haut, r_c, et de mesurer la hauteur h.
Le volume est alors approximativement $V = \dfrac{\pi h}{6}\left(r_a^2 + 4r_b^2 + r_c^2\right)$

1. Démontrer que la formule des vignerons donne le volume exacte d'un tronc de cône de rayon r et de hauteur h (on prendra le rayon intermédiaire à mi-hauteur).

2. Déterminer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près du volume de deux cylindres, le premier de hauteur 1 et de rayon 0,4 et le deuxième de hauteur 1 et de rayon 0,3.

3. Un tonneau de 1 m de hauteur et de 0,8 m de plus grand diamètre peut être assimilé à un volume de révolution d'axe (Oz), limité par les plans d'équation $z = -0{,}5$ et $z = 0{,}5$, et dont la courbe dans le plan (yOz) est donnée par l'équation $y = 0{,}4 - 0{,}4z^2$.

a. Faire la représentation graphique d'un tonneau.

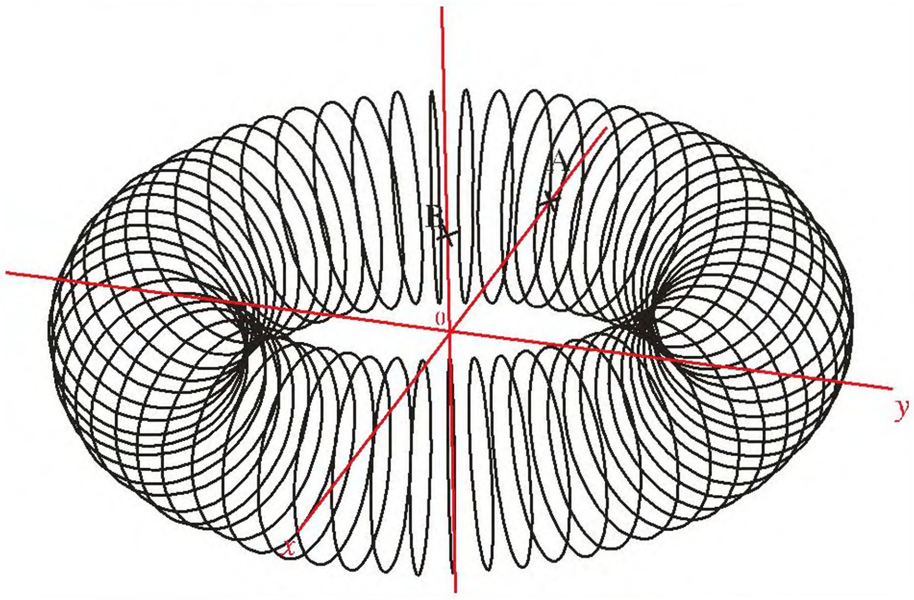
b. Expliquer pourquoi le volume du tonneau doit être compris entre 283 et 503 litres.

c. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près du volume du tonneau à l'aide de la formule des vignerons.

d. Entre les hauteurs z et $z + dz$, la « tranche » de tonneau a un volume dv qui peut être assimilé à un cylindre dont on donnera le rayon et la hauteur.
En déduire que $V = 2\int_0^{0{,}5} \pi(0{,}4 - 0{,}4z^2)^2 dz$.
Donner la valeur exacte du volume du tonneau.

63 ★★ Détermination du volume d'un tore

1. Représenter, à l'aide d'un logiciel, le tore constitué par la révolution autour de l'axe (Oz) d'un cercle de centre $A(0\,;3\,;0)$ et de rayon 1.



2. Cas général pour un tore constitué par la rotation d'un cercle de rayon r dont le centre est situé à une distance R de l'axe de révolution.

a. Démontrer, sans aucun calcul, mais en utilisant une aire particulière que $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - t^2}\,dt = \dfrac{\pi r^2}{2}$.

b. Démontrer que l'aire d'une couronne comprise entre les rayon R_1 et R_2 est $\mathscr{A} = \pi(R_2^2 - R_1^2)$.

c. Démontrer que la section d'un tore dans le plan d'équation $z = t$ est une couronne. En déduire que le volume recherché est $V = 4\pi R\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - t^2}\,dt$.

d. Simplifier l'expression de V à l'aide de **2. a.**

3. Le réacteur à fusion nucléaire ITER utilise un confinement magnétique du plasma à très haute température. La chambre a la forme d'un tore de petit rayon 2 m et de grand rayon 6,5 m.

Déterminer le volume de la chambre de ce tore.

Indications avec Geospace : Créer le plan $\mathscr{P}$ d'équation $Z = 0$, puis le cercle $\mathscr{C}$ dans le plan $\mathscr{P}$, de centre O et de rayon 3, puis le point A sur le cercle $\mathscr{C}$.

Enfin, créer le point B sur l'axe (oz) et le cercle $\mathscr{S}$ dans le plan (AOB) de centre A et de rayon 1. Passer en mode Trace sur le cercle $\mathscr{S}$ pour obtenir le tore.

PROBLÈME OUVERT

64 ★ Démontrer que la surface d'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ contient trois droites.

65 ★★ Soit la fonction définie par $f(x\,;y) = \dfrac{10x}{x^2 + y^2 + 1}$.

En utilisant un logiciel 3D, la surface représentative de la fonction semble présenter un sommet, dont on donnera les coordonnées.

Justifier qu'il s'agit bien du maximum de la fonction f.

Type BAC

66 ROC **Restitution Organisée de Connaissances**

Soit le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$.
Démontrer que, pour tout réel k positif, son intersection avec le plan d'équation $z = k$ est un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

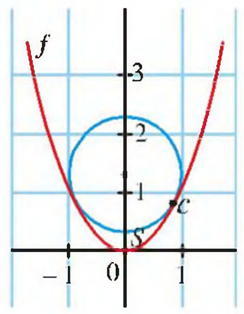
Application

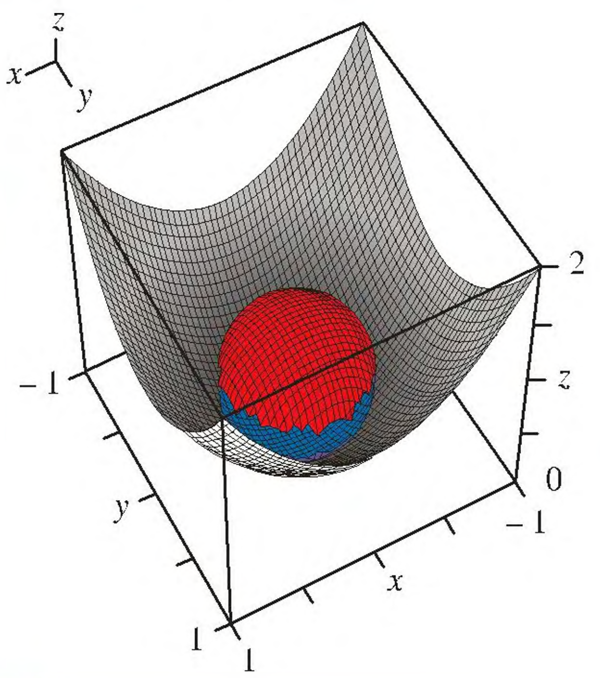
Soit une sphère, intérieure et tangente au paraboloïde suivant un cercle.

1. Démontrer que le centre C de la sphère a pour coordonnées $(0\,;0\,;c)$ où c est un réel.

2. Démontrer que la droite tangente au point A d'ordonnée a à la parabole dans le plan (yOz) a pour vecteur directeur $\vec{u}(0\,;1\,;2a)$.

3. Démontrer que le rayon de la plus grande sphère intérieure au paraboloïde et tangente au sommet est 0,5.





67 VRAI OU FAUX ?

Répondre par vrai ou faux, en justifiant.

1. La surface d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ est un paraboloïde.

2. La droite de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;0\,;1)$ passant par le point $A(1\,;2\,;-2)$ a deux points d'intersection avec le cylindre d'axe (Oz) et de rayon 3.

3. L'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 4$ avec la sphère de centre O de rayon 5 est un cercle de rayon 3.

4. Les lignes de niveau de la fonction f définie par $f(x\,;y) = 3x + 2y^2 - 3y - 5$ sont des hyperboles.

5. La cote maximale dans le plan d'équation $x = 2$ de la surface représentative de $f(x\,;y) = 2xy^2 - 2y - 5$ est 51.

68 QCM

1. L'intersection du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 5$ par le plan d'équation $z - y = 10$ est :

a. La réunion de deux droites.

b. un cercle de rayon 5.

c. Une ellipse.

d. L'ensemble vide.

2. L'intersection de la surface d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et du plan d'équation $\mathcal{P} : x - y = 0$ est :

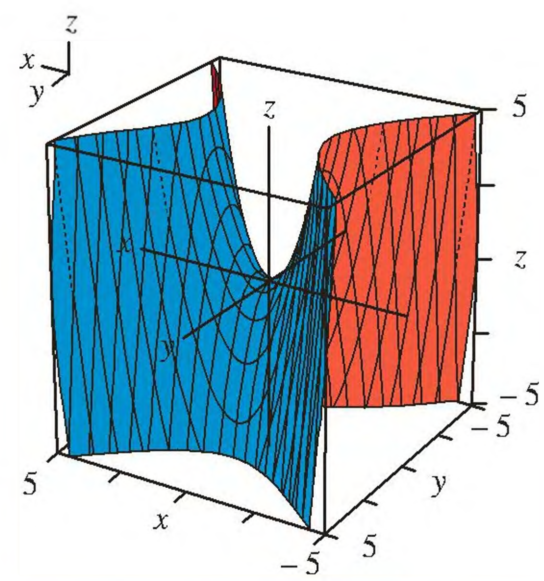
a. Une droite. **b.** La réunion de deux droites.

c. Un cercle. **d.** Une parabole.

3. L'équation de la surface représentée est :

a. $z = x^2 + y^2$ **b.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

c. $z = x^2 - y^2$ **d.** $z = xy$



69 ÉPREUVE PRATIQUE **TICE**

Soit le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 9$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y - \dfrac{z}{\tan\theta} = 0$ où θ est un réel de l'intervalle $\left]\dfrac{-\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. À l'aide d'un logiciel, représenter la courbe $\mathcal{C}$, intersection du cylindre par le plan pour les différentes valeurs de θ, si θ peut être une variable libre, sinon pour les valeurs suivantes :
$\theta = 0\,;\theta = \dfrac{\pi}{3}\,;\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et donner l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

appeler l'examinateur pour vérification et aide éventuelle.

2. a. Que représente l'angle θ sur la figure ?

b. Quelle conjecture faire entre l'aire de $\mathcal{C}$ et $\dfrac{1}{\cos\theta}$?

c. À l'aide de vos observations, déterminer l'expression de l'aire de $\mathcal{C}$ en fonction de θ.

3. a. Quelle conjecture peut-on faire sur la position du plan $\mathcal{P}$ et sur la nature de $\mathcal{C}$ lorsque θ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$?

b. Le démontrer.

PRODUCTION DEMANDÉE

- la figure avec la position variable du plan $\mathcal{P}$ ou les deux positions significatives de $\mathcal{P}$,
- les conjectures du **2. b.** et **3. a.**

70 Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1\,;3\,;2)$; $B(4\,;6\,;-4)$ et le cône Γ d'axe $(O\,;\vec{k})$, de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de Γ est $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}z^2$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.

a. Déterminer une équation de $\mathcal{P}$.

b. Préciser la nature de l'intersection $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{P}$ et de Γ.

3. Soit $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $y = 3$.
On note $\mathcal{C}_2$ l'intersection de Γ et de $\mathcal{Q}$.
Sans justification, reconnaître la nature de $\mathcal{C}_2$ parmi les propositions suivantes :

- Deux droites parallèles.
- Deux droites sécantes.
- Une parabole.
- Une hyperbole.
- Un cercle.

Partie B

Soit x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées $(x ; y ; z)$.
Les ensembles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les sections définies dans la **partie A**.

1. On considère l'équation $(E) : x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des points de $\mathscr{C}_1$ dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x ; y ; z)$, où x, y et z désignent des entiers relatifs, est un point de Γ, alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.

b. Montrer que si M est un point de $\mathscr{C}_2$, alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10.

c. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.

d. Déterminer un point de $\mathscr{C}_2$, distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

71 ÉPREUVE PRATIQUE TICE

On considère les points $A(5 ; 0 ; 0)$; $B(5 ; 5 ; 5)$; $C(0 ; 5 ; 0)$ et $D(0 ; 0 ; 5)$.

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

2. Pour tout réel k de l'intervalle $[0 ; 5]$, on appelle $\mathscr{P}_k$ le plan d'équation $z = k$ et on note I_k et J_k les points d'intersection respectifs du plan $\mathscr{P}_k$ avec les droites (AB) et (CD).
Déterminer les coordonnées des points I_k et J_k en fonction de k.

3. Soit le réel k fixé. On construit les barycentres du système $\{(I_k ; t), (J_k ; 1 - t)\}$ pour les valeurs de t comprises entre 0 et 1.
Démontrer que le lieu géométrique des barycentres est le segment $[I_kJ_k]$.

4. Soit $\mathscr{S}$ la surface obtenue par la réunion des segments $[I_kJ_k]$.

a. Représenter la surface $\mathscr{S}$ a l'aide d'un logiciel 3D.

appeler l'examinateur pour vérification

b. Démontrer que les coordonnées d'un point $M(x ; y ; z)$ de S vérifient $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2kt + 5 - 5t - k, t \in [0 ; 1] \text{ et } k \in [0 ; 5] \\ z = k \end{cases}$

c. En déduire qu'une équation de $\mathscr{S}$ est

$$2xz - 5x - 5y - 5z + 25 = 0.$$

5. a. La surface semble contenir un segment parallèle à l'axe (Oz). Le préciser.

b. Le démontrer.

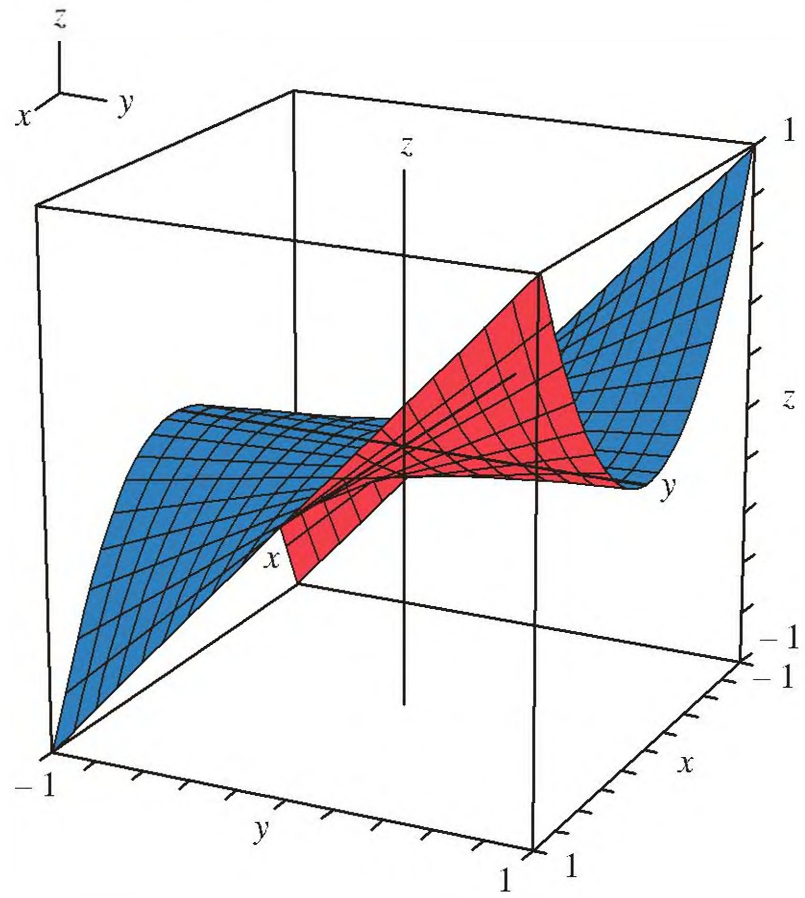
PRODUCTION DEMANDÉE

- la figure avec la visualisation de la surface $\mathscr{S}$,
- la démonstration du **4.b.**
- la conjecture et la démonstration du **5.**

72 L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la surface $\mathscr{T}$ d'équation $x^2y = z$, avec $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$. La figure ci-dessous est une représentation de la surface $\mathscr{T}$, dans un cube de centre O et de côté 2.

1. Éléments de symétrie de la surface $\mathscr{T}$

a. Montrer que, si le point $M(x ; y ; z)$ appartient à $\mathscr{T}$, le point $M'(-x ; y ; z)$ appartient aussi à $\mathscr{T}$. En déduire un plan de symétrie de $\mathscr{T}$.



b. Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de $\mathscr{T}$.

2. Intersection de la surface $\mathscr{T}$ avec des plans parallèles aux axes

a. Déterminer la nature des courbes d'intersection de $\mathscr{T}$ avec les plans parallèles au plan (xOy).

b. Déterminer la nature des courbes d'intersection de $\mathscr{T}$ avec les plans parallèles au plan (yOz).

3. Intersection de la surface $\mathscr{T}$ avec des plans parallèles au plan (xOy) d'équations $z = k$, avec $k \in [0 ; 1]$

a. Déterminer l'intersection de la surface $\mathscr{T}$ et du plan d'équation $z = 0$.

b. Pour $k > 0$, on note K le point de coordonnées $(0 ; 0 ; k)$.
Déterminer, dans le repère $(K ; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la courbe d'intersection de $\mathscr{T}$ et du plan d'équation $z = k$.

c. Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $(K ; \vec{i}, \vec{j})$. On précisera, en particulier, les coordonnées des extrémités de l'arc.

4. On note $\mathscr{D}$ le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface $\mathscr{T}$, soit $\mathscr{D} = \{M(x ; y ; z) \in E$, avec $0 \leqslant x \leqslant 1 ; 0 \leqslant y \leqslant 1$ et $z \leqslant x^2y\}$.

a. Pour $0 < k \leqslant 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine $\mathscr{D}$ selon une surface constituée des points vérifiant $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $\dfrac{k}{x^2} \leqslant y \leqslant 1$.
Calculer, en fonction de k, l'aire $S(k)$, exprimée en unités d'aire, de cette surface.

b. On pose $S(0) = 1$. Calculer, en unités de volume, le volume V du domaine $\mathscr{D}$.

AIDE On rappelle que $V = \int_0^1 S(k)dk$.

Pour préparer le BAC

Retrouver les solutions sur : www.bordas-pixel.fr/TleS

Durée : 45 minutes

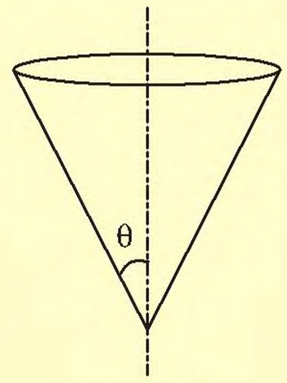
ROC

AIDE
Choisir un plan pour une section du cône faisant apparaître θ.

Démontrer que, dans un cône d'équation $kz^2 = x^2 + y^2$, on a $k = \tan^2\theta$ où θ est l'angle entre l'axe et une génératrice du cône.

Application

On cherche quelles doivent être l'ouverture et l'équation du cornet en verre utilisé en chimie pour filtrer des solutions.



1. Sachant que le papier filtre utilisé est plié en quatre, montrer que la partie réellement utilisée est en fait un demi-disque.

2. Déterminer l'angle θ et en déduire l'équation du cône.

QCM

Durée : 45 minutes

Soit la surface d'équation $x^2 + y^2 = 2z^2$.

1. Elle contient le point :

a. $A(\sqrt{3}\,;5\,;\sqrt{7})$ b. $B(4\,;-2\,;2)$ c. $C(2\sqrt{3}\,;-4\,;\sqrt{14})$

AIDE
Procéder par élimination.

2. Son intersection avec le plan d'équation $y = 2$ est :

a. Une parabole b. Une hyperbole c. Un cercle

3. Elle admet comme plan de symétrie le plan d'équation :

a. $z = 2$ b. $y = 0$ c. $x + y = 2z$

AIDE
Le volume d'un cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

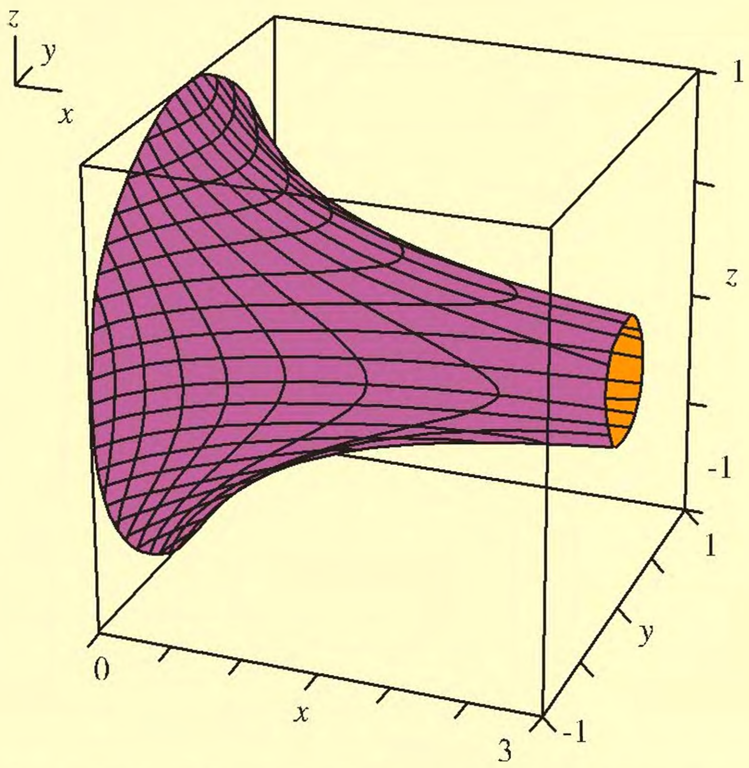
4. Son volume entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = 1$ est :

a. $\frac{2\pi}{3}$ b. $\frac{4\pi}{3}$ c. 4π

Durée : 30 minutes

EXERCICE

Soit l'arc de courbe d'équation $z = \frac{1}{x+1}$, limité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$, dans le plan $(O\,;\vec{i}, \vec{k})$. La rotation de l'arc de courbe autour de l'axe (Ox) engendre la surface de révolution ci-dessous :



1. Démontrer que l'intersection de cette surface avec le plan d'équation $x = 2$ est un cercle dont on donnera les caractéristiques.

2. Déterminer le volume du solide ci-dessus.

On rappelle que le volume d'un solide de révolution d'axe (Ox) limité par une surface engendrée par la courbe d'équation $y = f(x)$ et les plans d'équations $x = a$ et $x = b$ est donné par $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$.

Pour préparer le BAC

Durée : 1 h 15 minutes

EXERCICE

Une surface d'équation $x^2 + y^2 = 9(z - 4)^2$ contient exactement une sphère posée sur le plan de base (xOy).

1. Justifier que l'enveloppe est un tronc de cône dont on donnera le sommet, l'axe et la hauteur.

2. Déterminer le volume de ce cône.

3. Quelle est la nature de la courbe représentative des points communs à la sphère et au cône ?

4. Sur quelle droite de l'espace se situe le centre de la sphère ?
En déduire une simplification des coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$ du centre de la sphère.

5. a. Tracer la section de l'ensemble des deux solides par le plan (yOz) et noter H_1 et H_2 les deux points de contact entre la sphère et les deux génératrices du cône comprises dans ce plan.

b. Donner des équations des courbes représentant la section du cône par ce plan.

c. Déterminer la valeur exacte de γ, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Durée : 1 heure

ÉPREUVE PRATIQUE TICE

Soit la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = 2x^2y - y^2$.

1. En utilisant un tableur, donner les différentes valeurs de z pour x et y prenant des valeurs entières comprises entre – 5 et 5.

L'utilisation de « $ » permet de recopier une ligne sans changer la valeur de x ou de y.

Appeler l'examinateur pour vérifier et aide si besoin.

2. a. Quelle symétrie apparaît dans le tableau ?

b. En déduire celle de la surface.

c. Le démontrer.

3. a. Construire la surface représentative.

b. À l'aide des lignes de niveaux, pour quelles valeurs de y, la surface est-elle au dessus du plan (xOy) ?

c. Le démontrer.

PRODUCTION DEMANDÉE

- réponses écrites au **2. c.** et **3. c.**
- affichage à l'écran du tableau des valeurs de z et de la représentation graphique de $\mathcal{S}$.

PISTES ET CONSEILS

ÉPREUVE PRATIQUE

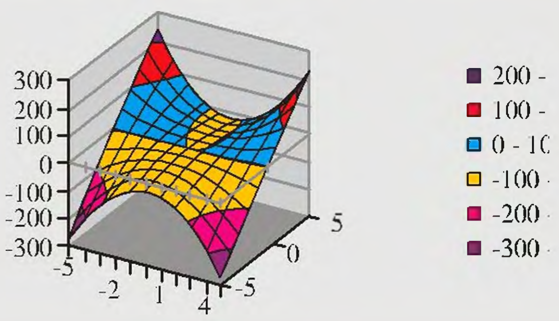
Avec le tableur Excel

En première ligne, écrire les valeurs de x de – 5 à 5 et, en colonne A, les valeurs de y de – 5 à 5. En B2, taper : « = 2*B1^2*A2-$A2^2».

B2 | fx =2*B1^2*A2-$A2^2

	A	B	C	D
1		5	4	3
2	-5	-275	-185	-115
3	-4	-215	-144	-83

Sélectionner l'ensemble du tableau et insérer un diagramme de type surface.



TICE

Voir les TICE, p.131

Représenter un solide de révolution et un plan

FICHIERS disponibles sur le site www.bordas-pixels.fr/TleS :
Solutions sous Geospace, Cabri 3D et Derive 6.

Soit le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 2$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y + z - 4 = 0$. Représenter l'intersection du cylindre et du plan.

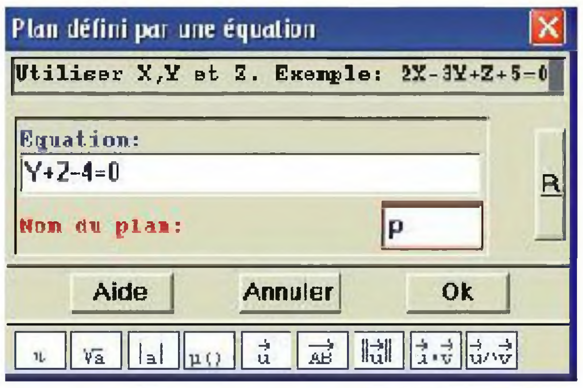
Avec Geoplan-Geospace

• Créer une nouvelle figure de l'espace, puis un point libre A sur la droite (oz).

• Créer le cylindre de segment oA et de rayon rac(2).



• Créer le plan $\mathcal{P}$ défini par son équation



Pour visualiser l'intersection du plan et du cylindre, il faut utiliser l'intersection des génératrices avec le plan $\mathcal{P}$.

• Créer le cercle directeur dans le plan $\mathcal{P}$.



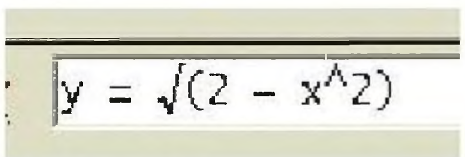
• Créer un point libre M sur le cercle $\mathcal{C}'$ puis la droite d passant par M et parallèle à l'axe oz.

• Demander le point N intersection de d et de $\mathcal{P}$.

• Avec **Afficher – Sélection trace**, sélectionner le point N. Cliquer ensuite sur l'icône **Trace** et faire décrire au point M le cercle directeur.

Avec Derive 6

• Introduire l'expression



dans la fenêtre de saisie et valider.

• Cliquer sur l'icône « graphique 3D »

• Fenêtre/mosaïque verticale permet d'obtenir les deux fenêtres côte à côte.

• Cliquer à nouveau sur l'icône 3D.

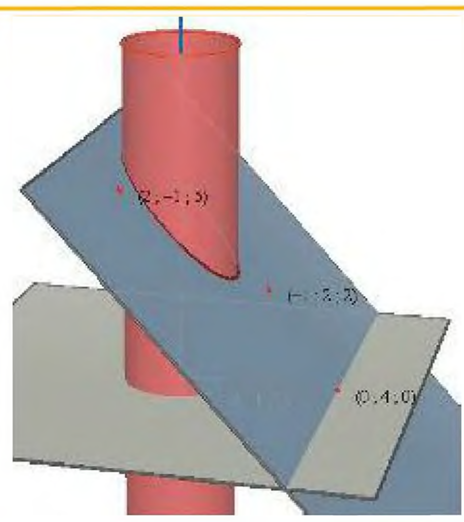
• Recommencer avec $y = -\sqrt{(2 - x^2)}$ pour obtenir le deuxième demi-cylindre.

• Créer le plan $\mathcal{P}$ par son équation $y + z - 4 = 0$.

Avec Cabri 3D

• Créer successivement :
– la droite (Oz) ;
– le point A de coordonnées $(1 ; 1 ; 0)$;
– le cylindre $\mathcal{C}$ d'axe (Oz) passant par A ;
– les points de coordonnées $(2 ; -1 ; 5)$, $(-1 ; 2 ; 2)$ et $(0 ; 4 ; 0)$ (par exemple, points choisis dans le plan) ;
– le plan $\mathcal{P}$ contenant ces trois points.

• Demander enfin la courbe, intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.



Applications

Soit le point $S(0 ; 0 ; 4)$ et le cercle Γ défini par $x^2 + y^2 = 4$ et $z = 0$.

1. Soit M un point du cercle Γ ; quel est le lieu des points de la droite (SM) lorsque M décrit Γ ?

2. On note $\mathcal{C}$ cet ensemble de points. Déterminer son intersection avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 6$.

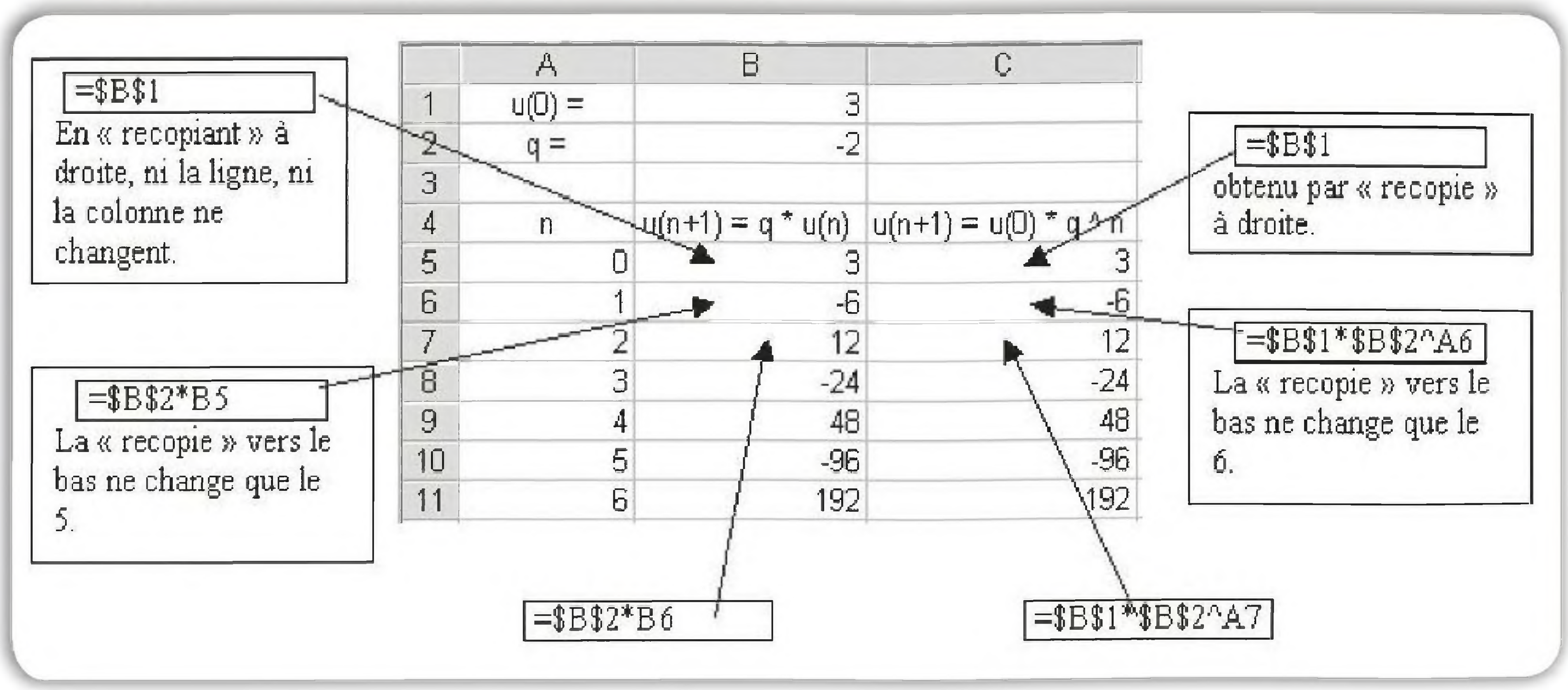
Les TICE

en Terminale S

Fonctions utiles dans un tableur

1. Références relative et absolue

Pour construire le tableau vérifiant, sur les premiers termes, la validité de la formule donnant le terme général d'une suite géométrique, on opère comme suit :



	A	B	C
1	u(0) =	3	
2	q =	-2	
3			
4	n	u(n+1) = q * u(n)	u(n+1) = u(0) * q ^ n
5	0	3	3
6	1	-6	-6
7	2	12	12
8	3	-24	-24
9	4	48	48
10	5	-96	-96
11	6	192	192

On « recopie » en tirant la poignée de recopie **+** située dans le coin inférieur droit de la cellule (ou du groupe de cellules) sélectionné(s).

En règle générale :

- En « recopiant » vers le bas, le numéro de ligne augmente d'une unité, la lettre de colonne ne change pas.
- En « recopiant » vers la droite, la lettre de colonne augmente d'un rang, le numéro de ligne ne change pas.

Dans ces deux cas, on parle alors de **référence relative**.

=5*B2	=5*C2
=5*B3	

Le symbole $ placé devant la lettre ou (et) le numéro fige cette lettre ou ce numéro.
On parle alors de **référence absolue**.

=B2*D5	=C2*D5
=B3*D5	

Vers le bas, seul 2 change.
Vers la droite, seule B change

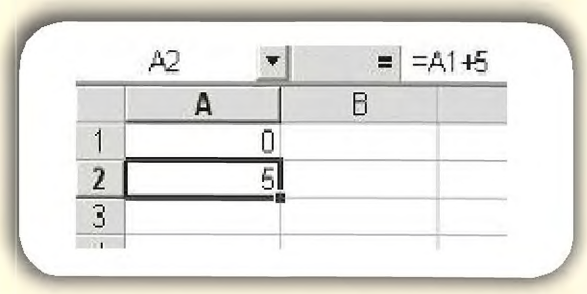
=$B2*D$5	=$B2*E$5
=$B3*D$5	

Vers le bas, seul 2 change.
Vers la droite, seule D change

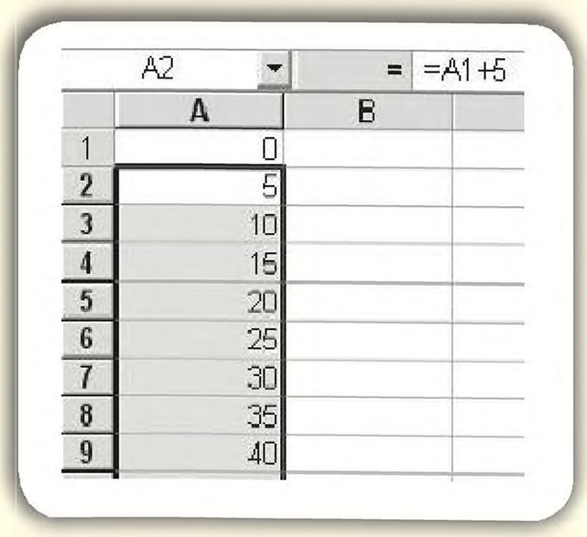
2. Générer une suite dans un tableur

On souhaite générer une suite des multiples de 5 de 0 à 100.
Plusieurs procédures permettent d'obtenir une colonne formée des multiples de 5 de 0 à 100 :

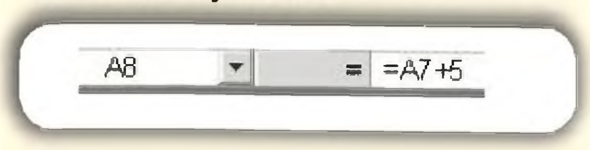
• Écrire 0 dans la cellule A1, puis = A1+5 dans la cellule A2.



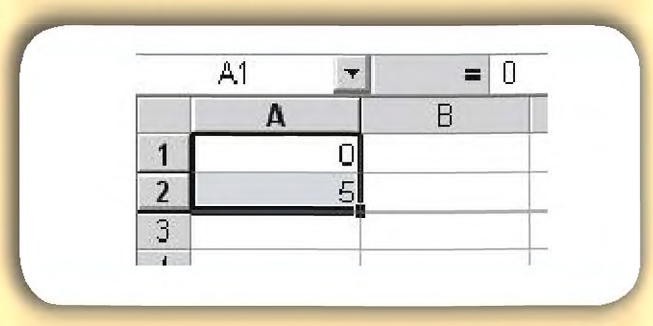
• Sélectionner la cellule A2. La « recopier » jusqu'à la cellule A100.



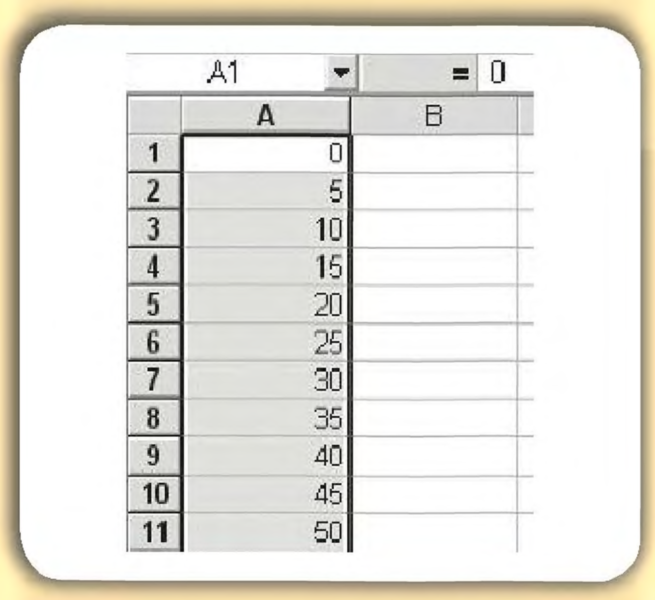
• Chacune des cellules a été « remise à jour » :



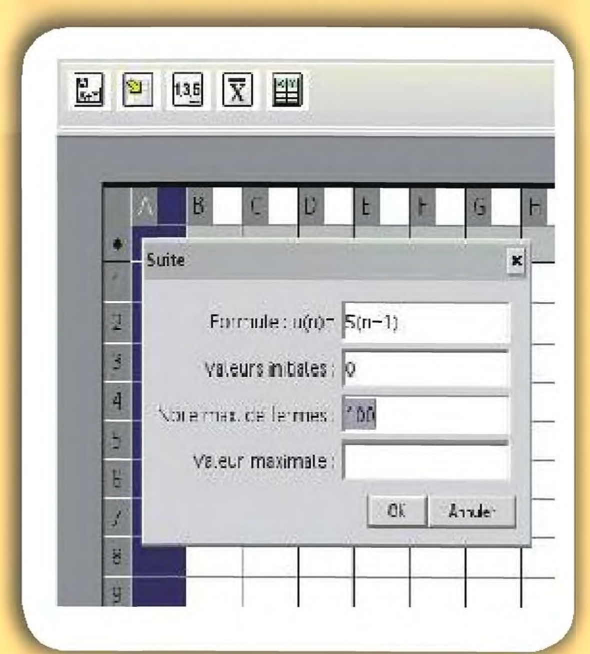
• Écrire 0 dans la cellule A1 et 5 dans la cellule A2.

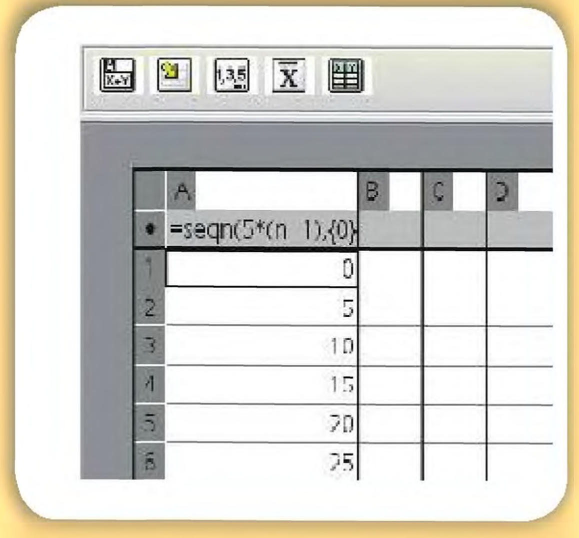


• Sélectionner les deux cellules A1 et A2. « Recopier » jusqu'à la cellule A100.

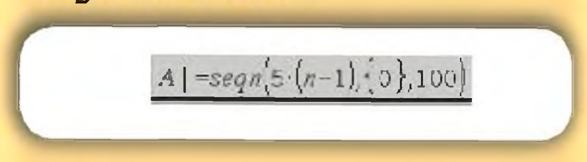


• Utiliser un générateur de suites, s'il existe dans le tableur :





• Ligne d'édition :



Programmation

Écriture du programme

TI		Casio
[PRGM] [▶] [▶] [ENTER] (NEW)	Se placer en mode programme	MENU B (PRGM) [F3] (NEW)
[S] [E] [C] [D] [E] [G] [ENTER]	Donner un nom au programme	[S] [E] [C] [D] [E] [G] [EXE]
	Écrire le programme correspondant.	
[2ND] [QUIT]	Quitter le mode programme.	

Instruction If... Then... Else... End

Cette instruction propose un choix alternatif à partir d'une condition (If ...) réalisée (Then...) ou non (Else...).

Exemple : Programmer la résolution d'une équation du second degré dans ℝ.

If	*condition*
Then	*instructions si vrai*
Else	*instructions si faux*
End (ou IfEnd)	*fin du groupe d'instructions*

```
PROGRAM:SECDEG
:Disp "A≠0"
:Prompt A,B,C
:B²-4AC→D
:Disp "D=",D
:If D<0
:Then
:Disp "NEANT"
```

```
PROGRAM:SECDEG
:Else
:Disp "X1=",(-B-
√(D))/(2A)▶Frac
:Disp "X2=",(-B+
√(D))/(2A)▶Frac
:End
:
```

Nom du programme
Afficher A ≠ 0
Demander les valeurs des coefficients A, B et C.
Calculer le discriminant D.
Afficher la valeur de D.
Si D < 0,
Alors
Afficher « néant » (pas de solution)

Sinon
Afficher la valeur de la solution x_1.

Afficher la valeur de la solution x_2.

Fin du « For »

```
======SECDEG ======
"A≠0"↵
"A="?→A:"B="?→B:"C="?
→C↵
B²-4AC→D↵
"D=":D◢
If D<0↵
TOP BTM SRC MENU SYBL
```

```
======SECDEG ======
If D<0↵
Then "NEANT"◢
Else "X1=":(-B-√D)÷(2
A)◢
"X2=":(-B+√D)÷(2A)◢
IfEnd
TOP BTM SRC MENU SYBL
```

Remarques : le programme peut être simplifié dans le cas où l'on ne donne des instructions que si la condition est réalisée : If *condition* : Then : *instruction* 1 *si vrai* : *instruction* 2 *si vrai* : End.

Dans le cas où une seule instruction est donnée si la condition est vraie, on peut même écrire : If *condition* : *instruction* 1 *si vrai* : *instruction* 2 etc. L'instruction 1 est alors réalisée si la condition est vérifiée et sautée dans le cas contraire.

Instruction For... End

Cette instruction propose de parcourir la boucle de For à End autant de fois que l'indique le compteur. For (K, 1, 6) ou For 1 → K To 6 signifie que le programme va exécuter les instructions quand K prend les valeurs de 1 à 6.

For (variable, départ, arrivée)
instructions
End (ou Next) *fin de la boucle*

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$

et la relation $u_{n+1} = \dfrac{3}{2u_n - 5}$.

Afficher les termes d'indices 1 à 6.

```
PROGRAM:TERMES
:0→N:2→U
:For(K,1,6)
:3/(2U-5)→U
:Disp U
:End
```

Nom du programme
Initialiser la suite : indice 0 et premier terme : 2.
De K = 1 à K = 6,
Calculer le terme suivant.
Afficher le terme calculé.
Fin de la boucle.

```
======TERMES ======
0→N:2→U↵
For 1→K To 6↵
3÷(2U-5)→U↵
U◢
Next
TOP BTM SRC MENU SYBL
```

Remarque : le pas d'incrémentation, par défaut, est 1. Si l'on désire un autre pas, le préciser en 4e instruction de la parenthèse chez TI et avec la commande Step en fin de ligne de l'instruction For chez Casio.

Instruction While... End

Cette instruction propose de parcourir la boucle de While à End tant que la condition est réalisée. Dès que la condition n'est plus vraie, le programme saute les instructions de la boucle et poursuit celles qui sont situées après.

While *condition* *Instructions tant que vrai* End (ou WhileEnd) *fin de la boucle*

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n - 5}$.

À partir de quel indice, le terme de la suite (u_n) est-il à moins de 10^{-6} de la limite pressentie : –0,5 ?

```
PROGRAM:INDICE
:0→N:2→U
:While abs(U-(-0
.5))>1E-6
:3/(2U-5)→U
:N+1→N
:End
:Disp "N=",N
```

Nom du programme
Initialiser la suite : indice 0 et premier terme : 2.
Tant que $|u_n - (-0{,}5)| > 10^{-6}$

Calculer le terme suivant.
Incrémenter l'indice.
Fin de la boucle.
Afficher l'indice cherché.

```
======INDICE  ======
0→N:2→U↵
While Abs (U-(-0.5))>
10-6↵
3÷(2U-5)→U:N+1→N↵
WhileEnd↵
"N=":N◢
TOP BTM SRC MENU    SYBL
```

■ Exécution du programme

(PRGM) (ENTER) (EXEC)
(▼)···(▼)(ENTER)

Demander l'exécution d'un programme et descendre jusqu'au programme cherché. Valider. (TI : on peut aussi taper le numéro du programme).

MENU B (PRGM)
(▼)···(▼) (EXE)

Sur Casio, le programme est lancé par l'instruction (EXE). Sur TI, le nom du programme apparaît dans l'écran de calcul : `prgmSECDEG` On lance son exécution avec (ENTER).

Exemples :

Programme SECDEG (collecte de données)

```
prgmSECDEG
A≠0
A=?2
B=?-5
C=?-3
```

```
A≠0
A=?
2
B=?
-5
C=?
-3
```

Programme SECDEG (affichage de résultats)

```
D=
               49
X1=
             -1/2
X2=
                3
             Done
```

```
D=
               49
X1=
             -0.5
X2=
                3
         - Disp -
```

Programme TERMES (affichage de résultats)

```
              -3
  -.2727272727
  -.5409836066
  -.4932614555
  -.5011256191
  -.4998124672
          Done
```

```
             -3
-0.2727272727
-0.5409836066
-0.4932614555
-0.5011256191
-0.4998124672
     - Disp -
```

Programme INDICE (affichage de résultats)

```
prgmINDICE
N=
             9
          Done
```

```
N=
             9
      - Disp -
```

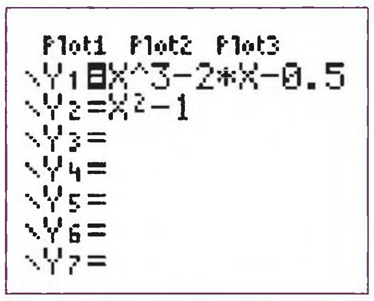
Étudier une fonction sur une calculatrice TI

Graphique d'une fonction

Exemple : $f(x) = x^3 - 2x - 0{,}5$.

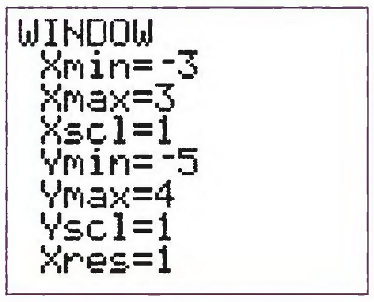
- **Mise en mémoire** [Y=]

Y1 est sélectionné
Y2 ne l'est pas

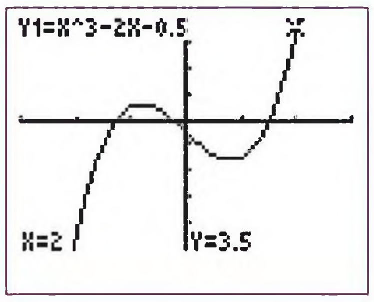


- **Fenêtre du tracé** [WINDOW]

Xscl (Yscl): pas de la graduation
Xres : résolution du tracé



- **Graphe** [GRAPH] ou [TRACE]

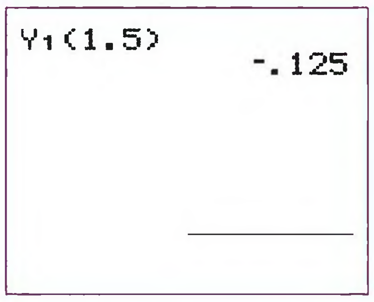


Calcul de valeurs

- **Dans l'écran graphique** [TRACE] puis entrer la valeur de *X*.

- **Dans l'écran de calcul**

[VARS] [▶] Y-VARS
1 : Function Y1



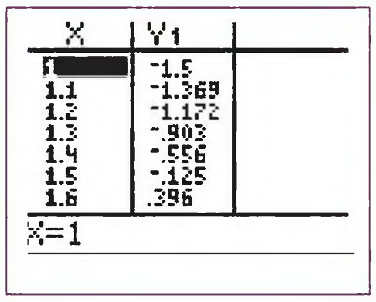
- **Dans le tableau de valeurs**

[2ND] [WINDOW] (TBLSET)
Valider chaque ligne modifiée.



Afficher le tableau

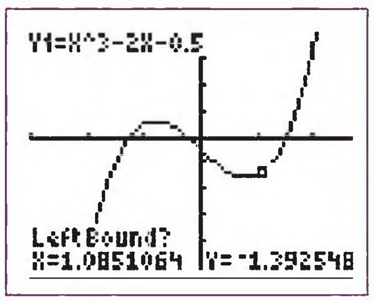
[2ND] [GRAPH] (TABLE)

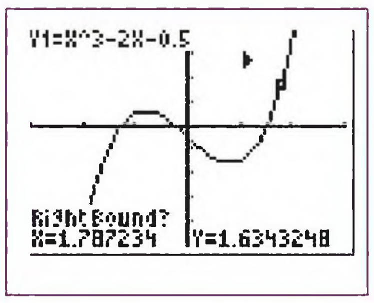


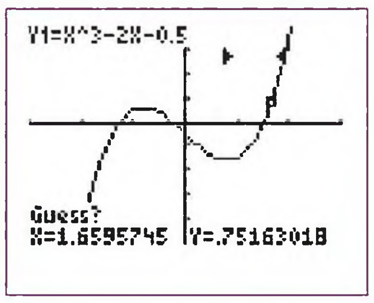
Racines, minimum, maximum intersection

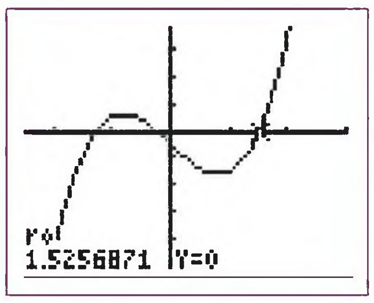
On les obtient par [2ND] [TRACE] (CALC).

Exemple : résoudre $f(x) = 0$
2 : zero. Choisir un point à gauche et à droite puis une valeur proche du zéro. Valider à chaque fois.





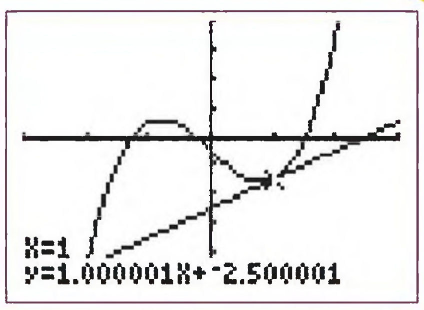




Tangentes

* Pour tracer la tangente [2ND] [PRGM] (DRAW) 5 : Tangent
Déplacer le point avec le curseur ou entrer la valeur de X.

* Pour calculer le nombre dérivé [2ND] [TRACE] 2ND Trace (CALC) 6 : dy/dx



Étudier une suite numérique sur TI

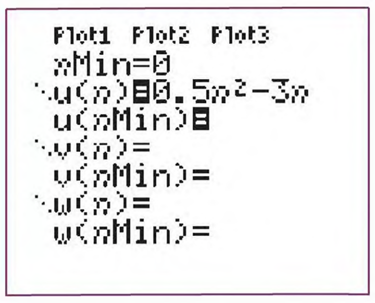
Mettre la calculatrice en mode suite : [MODE] puis 4e ligne SEQ. Valider.

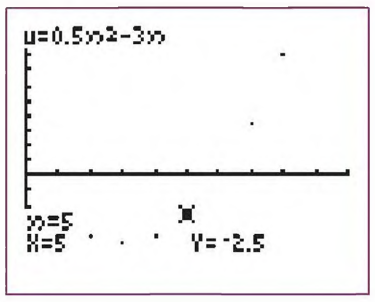
Mise en mémoire d'une suite [Y=]

• Suite définie en fonction de l'indice

$u_n = 0{,}5\,n^2 - 3n$

[WINDOW] [GRAPH] ou [TRACE] s'utilisent comme pour les fonctions.

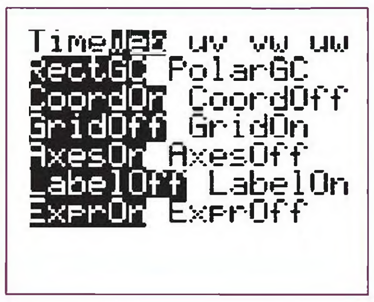




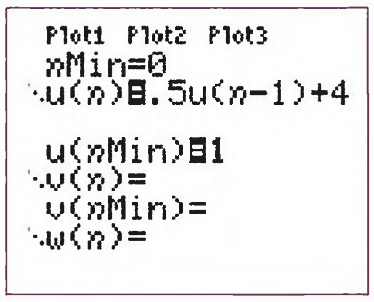
• Suite définie par récurrence

$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 0{,}5v_n + 4 \end{cases}$ Représentation « en toile d'araignée »

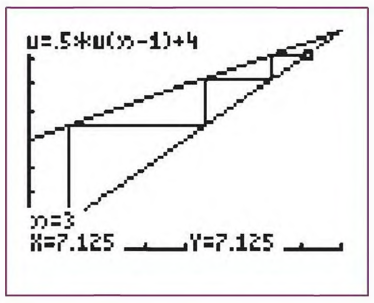
[2ND] [ZOOM] (FORMAT)
Modifier le format : Web



[Y=]
Compléter les 3 lignes



[TRACE]
Flèche droite du curseur

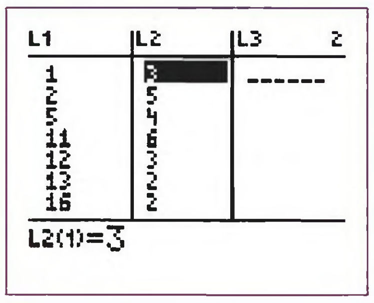


Statistiques sur TI

Dans l'exemple ci-dessous les valeurs x_i sont en L1 et les effectifs (ou les fréquences) n_i en L2

Mise en mémoire [STAT] 1 : Edit

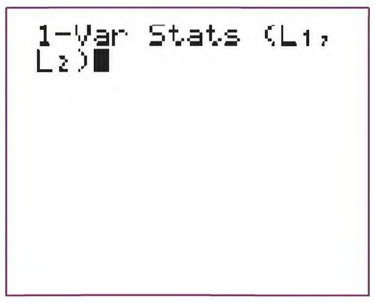
Calculs [STAT] [▶] CALC 1: 1-Var Stats



$\overline{X}$: moyenne



σx : écart type



Faire défiler l'écran

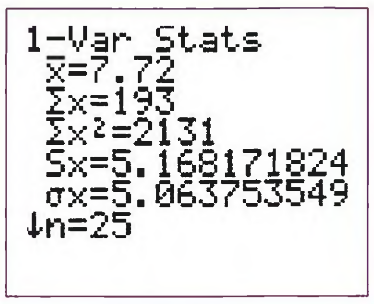
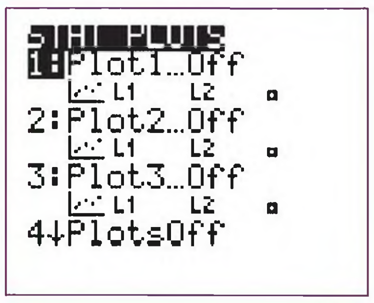
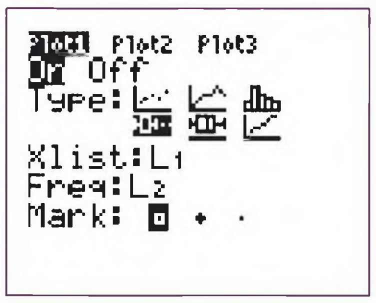


Diagramme en boîte

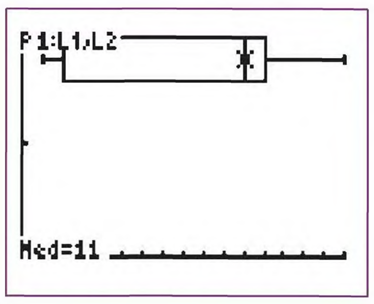
[2ND] [Y=] (STAT PLOT)



Type : choisir l'icône de gauche



[TRACE] Utiliser le curseur



Étudier une fonction sur une calculatrice CASIO

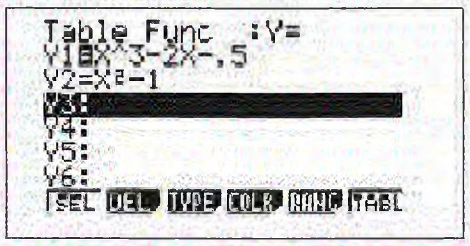
Menu 5 : GRAPH ou 7 : TABLE

Graphique d'une fonction [F3] (TYPE) [F1] (Y=)

Exemple : $f(x) = x^3 - 2x - 0,5$.

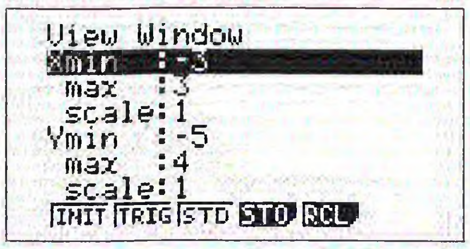
• Mise en mémoire

Y1 est sélectionné (SEL)
Y2 ne l'est pas.



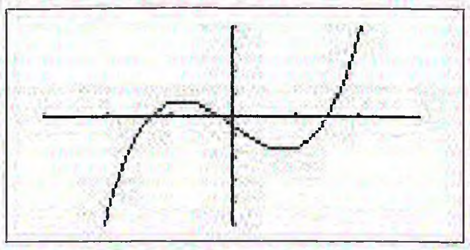
• Fenêtre du tracé

[SHIFT] [F3] (V-Window)
scale: pas de la graduation



• Graphique

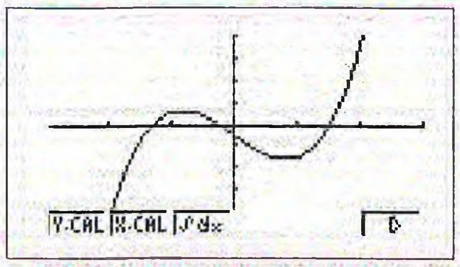
GRAPH : [F6] (DRAW)
TABLE : [F6] (TABL)
puis [F5] (G-CON)

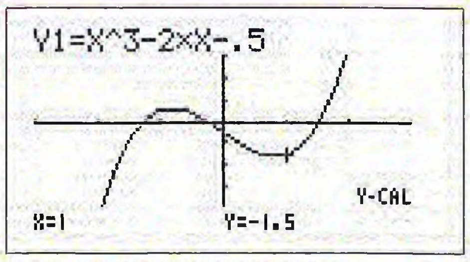


Calcul de valeurs

• Dans l'écran graphique GRAPH

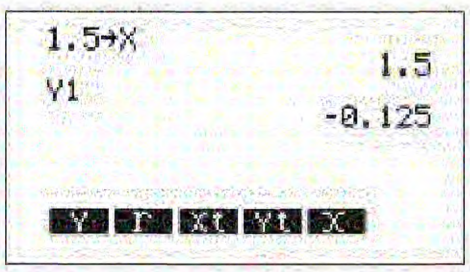
[F5] [F6] (Y-cal) ou (X-cal)





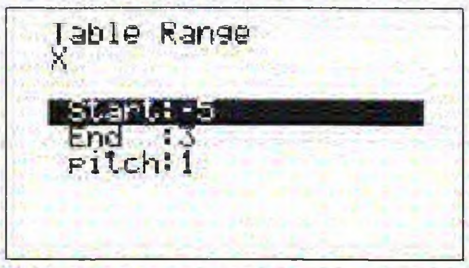
• Dans l'écran de calcul

Menu 1 : RUN
Stocker la valeur de X
[VARS] [F4] (GRPH) [F1] (Y) 1

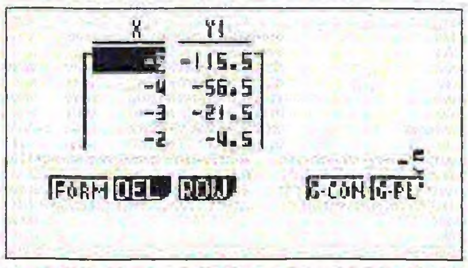


• Dans le tableau de valeurs

TABLE
Initialiser : [F5] (RANG)
pitch : pas

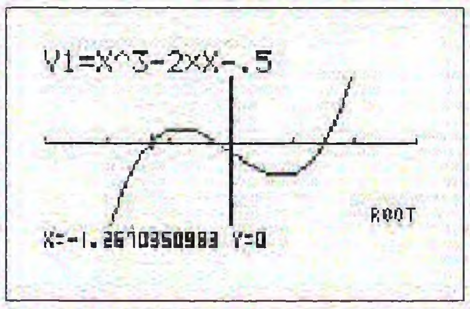


Afficher le tableau
[F6] (TABL)

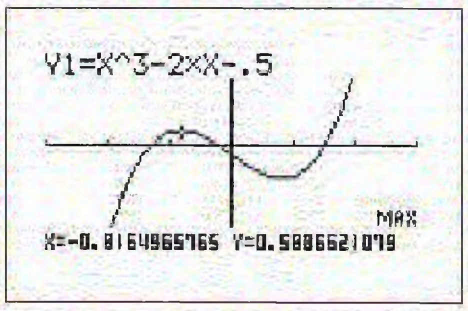


Racines, minimum, maximum, intersection : GRAPH

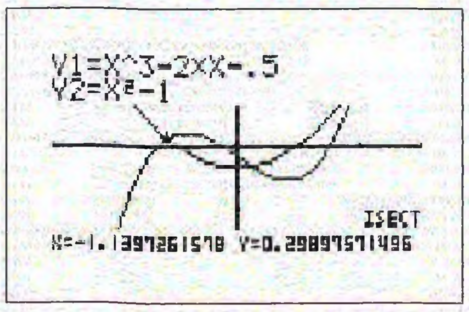
[F5] puis [F1] ROOT (racines)



[F2] MAX, [F3] MIN



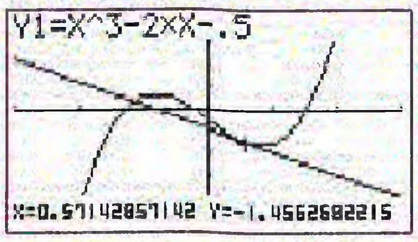
[F5] ISCT (intersection)



Utiliser le curseur pour obtenir les valeurs suivantes.

Tracer des tangentes GRAPH

[F4] puis [F2] (Tang) . Déplacer le point avec le curseur puis [EXE].



Étudier une suite numérique sur CASIO

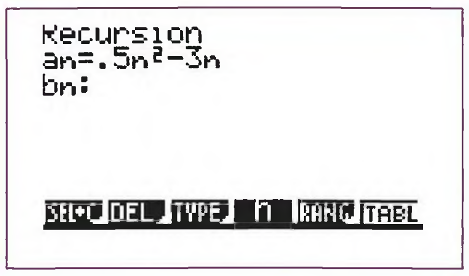
Menu 8 : RECUR

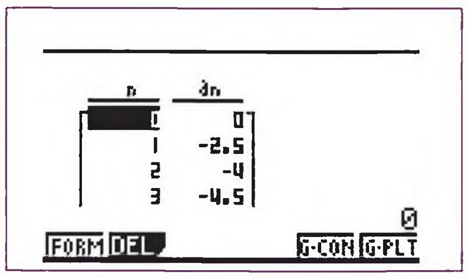
Mise en mémoire d'une suite

• **Suite définie en fonction de l'indice**

Exemple : $u_n = 0{,}5\,n^2 - 3n$.

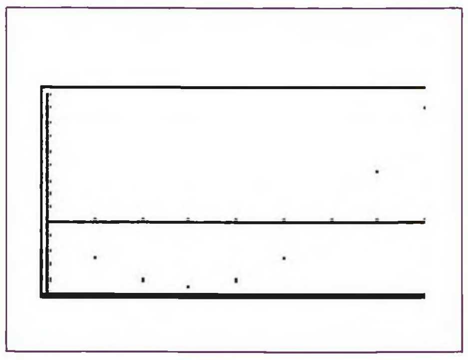
[F3] (TYPE) puis [F1] ($a_n = An + B$)





[SHIFT] [F3] (V-Window) pour modifier la fenêtre de tracé.

[F5] (RANG) pour modifier les valeurs de n.



• **Suite définie par récurrence**

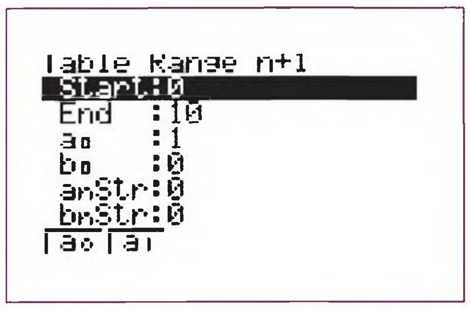
[F3] (TYPE) puis [F2] TYPE ($a_{n+1} = \text{A}an + \text{B}n + \text{C}$).

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 0{,}5v_n + 4 \end{cases}$$

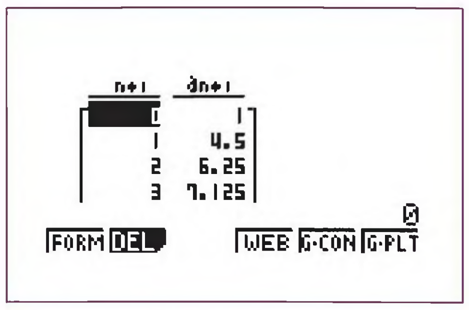


[F5] (RANG)

Compléter les lignes

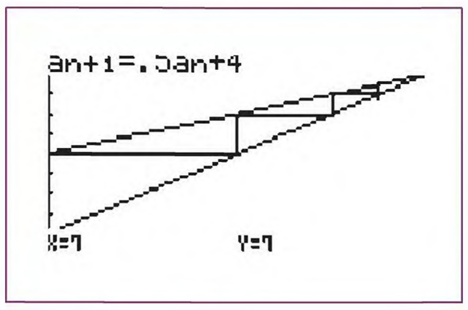


[F6] (TABLE)



[F4] (WEB)

Appuyer sur [EXE]



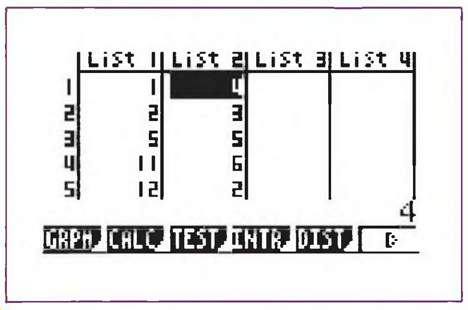
Statistiques sur CASIO

Menu 2 : STAT

Dans l'exemple ci-dessous les valeurs x_i sont en List1 et les effectifs (ou les fréquences) n_i en List2.

Mise en mémoire

Compléter les valeurs et les effectifs



Calculs

[F2] (CALC)

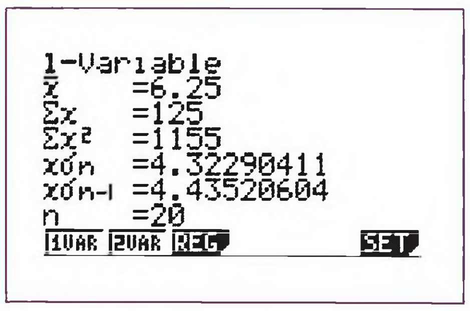
[F6] (SET) Compléter les deux premières lignes puis [EXIT]



[F1] (1VAR)

$\bar{x}$: moyenne

$x\sigma n$: écart type



Faire défiler avec le curseur

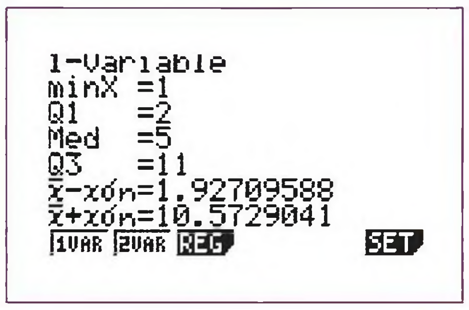
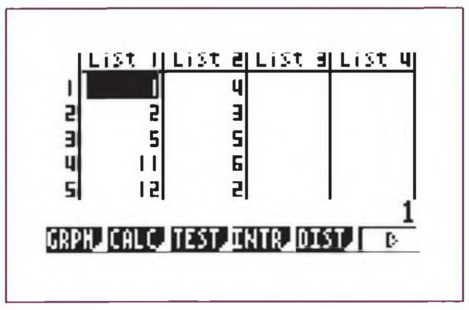


Diagramme en boîte

À partir de la liste des données ci-dessus :

[F1] (GRPH) puis [F6] (SET)

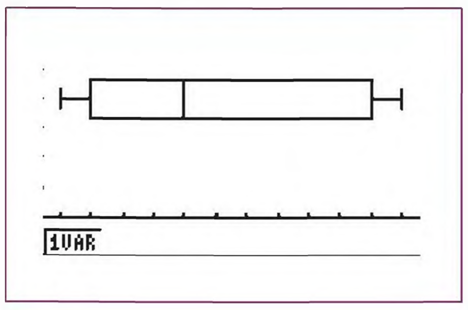


Choisir MedBox [F6] puis [F2] (BOX)

Préciser Xlist et Frequency



[EXIT] pour retourner à la liste puis [F1] (GPH1)



Mémento

Arithmétique

Division euclidienne de *a* par *b*

$a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q\ ;\ r)$ d'entiers relatifs tels que

$$0 \leqslant r < b \text{ et } a = bq + r.$$

a est le dividende, *b* le diviseur, *q* le quotient et *r* le reste.

Écriture en base 10 et critères de divisibilité

- En base 10,

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0$$

- Divisible

par 4 si $\overline{a_1 a_0}$ divisible par 4.

par 25 si $\overline{a_1 a_0}$ égal à 00, 25, 50 ou 75.

par 3 (resp. par 9) si $a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0$ divisible par 3 (resp. par 9).

Multiples et diviseurs

$a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$.

- *b* est un **multiple** de $a \Leftrightarrow a$ est un **diviseur** de *b* $\Leftrightarrow$ il existe un entier *k* tel que $b = ka$.
- Si *a* divise *b* et si *b* divise *c*, alors *a* divise *c*.
- Si *c* divise *a*, alors *c* divise *ab*.
- Si *c* divise *a* et *b*, alors *c* divise $a + b$, $a - b$, ainsi que toute combinaison linéaire de *a* et *b*.

$a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$.

- Si *b* divise *a*, alors $|b| \leqslant |a|$.
- Si *b* divise *a* et *a* divise *b* alors $a = b$ ou $a = -b$.

Nombres premiers

- Un nombre entier naturel est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs (1 et lui-même).
- Pour savoir si un nombre *n* est premier ou non, il suffit de tester sa divisibilité par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée.
- Tout entier naturel strictement supérieur à 1 admet une décomposition, unique à l'ordre des facteurs près, en produit de nombres premiers.

Congruences

$a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, et $n \in \mathbb{Z}^*$.

- ***a* est congru à *b* modulo *n*** équivaut à *a* et *b* ont le même reste dans la division euclidienne par *n*.
- $a \equiv b\ (n)$ si, et seulement si, *n* divise $a - b$.
- Si $a \equiv b\ (n)$ et $b \equiv c\ (n)$, alors $a \equiv c\ (n)$.

$a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\ ;\ 1\}$.

- Si $a \equiv b\ (n)$, alors $ac \equiv bc\ (n)$ et $a^p \equiv b^p\ (n)$.
- Si $a \equiv b\ (n)$ et si $c \equiv d\ (n)$,

alors $a + c \equiv b + d\ (n)$; $a - c \equiv b - d\ (n)$; $ac \equiv bd\ (n)$.

PGCD

$a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$.

- $pgcd(a\ ;\ b) \geqslant 1$; $pgcd(a\ ;\ a) = |a|$;
  $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(-a\ ;\ b) = pgcd(a\ ;\ -b)$.
- Si *b* divise *a* : $pgcd(a\ ;\ b) = |b|$.
- Si $a = bq + r$ $(0 \leqslant r < b)$: $pgcd(a\ ;\ b) = pgcd(b\ ;\ r)$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, $pgcd(ka\ ;\ kb) = k \times pgcd(a\ ;\ b)$.

Nombres premiers entre eux

$a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $c \in \mathbb{Z}^*$.

- *a* et *b* sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.
- Le PGCD de *a* et *b* est égal à *d* si, et seulement si, il existe $a' \in \mathbb{Z}^*$ et $b' \in \mathbb{Z}^*$ tels que : $a = da'$ et $b = db'$.
- Une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
- Si *a* est premier avec *b* et avec *c*, il est premier avec *bc*.

Théorème de Bézout

$a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$.

- *a* et *b* sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers *u* et *v* tels que $au + bv = 1$.
- Si $pgcd(a\ ;\ b) = d$, il existe des entiers *u* et *v* tels que $au + bv = d$.

Théorème de Gauss

$a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $c \in \mathbb{Z}$.

Si *a* divise le produit *bc* et si *a* est premier avec *b*, alors *a* divise *c*.

PPCM

$a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$.

- Le PPCM de a et b est le plus petit multiple commun strictement positif de a et b.
- $ppcm(a\,;\,b) = ab$ si, et seulement si, a et b sont premiers entre eux.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$ppcm(ka\,;\,kb) = k \times ppcm(a\,;\,b).$$

Relation entre $pgcd(a\,;\,b) = d$ et $ppcm(a\,;\,b) = m$

$$md = ab.$$

Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et n un entier naturel.

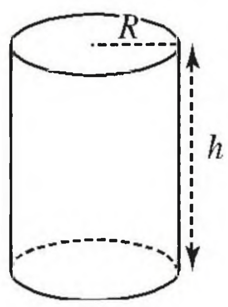
- $n^p \equiv n\ (p)$.
- Si n et p sont premiers entre eux, alors $n^{p-1} \equiv 1\ (p)$.

Géométrie

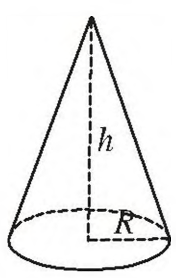
A Dans le plan et l'espace : rappels

Calculs de volumes

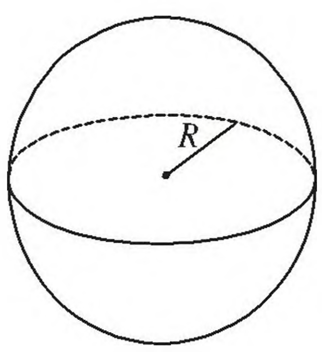
Volume d'un cylindre de hauteur h et de base de rayon R : $\pi R^2 h$.



Volume d'un cône de hauteur h et de base de rayon R : $\dfrac{\pi R^2 h}{3}$.



Volume d'une boule de rayon R : $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.



Triangles semblables

- Deux triangles sont dits semblables s'ils ont deux angles correspondants égaux.
- Deux triangles ABC et DEF sont semblables si, et seulement si, leurs côtés respectifs ont des longueurs proportionnelles.

ABC et DEF semblables $\Leftrightarrow \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$.

B Équations dans l'espace

On munit l'espace d'un repère orthonormal.

Équation cartésienne d'un plan

Pour $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ non nul, $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$ admettant $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ pour vecteur normal. Réciproquement, tout plan $\mathcal{P}$ de l'espace admet au moins une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + cz + d = 0,$$

le vecteur $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ étant normal à $\mathcal{P}$.

Équation d'une sphère

Soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $r > 0$.

Une équation de la sphère de centre A et de rayon r est $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$.

L'ensemble des points de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est soit une sphère, soit un point, soit l'ensemble vide.

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Toute droite Δ de l'espace est caractérisée par un système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = x_0 + pk \\ y = y_0 + qk\ , \quad k \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + rk \end{cases}$

où $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ est un point de Δ et $\vec{v}\,(p\,;q\,;r)$ un vecteur directeur de Δ.

Équations cartésiennes d'une droite de l'espace

Une droite de l'espace peut être définie comme la droite commune à deux plans non parallèles. Dans ce cas, elle est caractérisée par un système $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$, appelé **système d'équations cartésiennes** de cette droite.

C Similitudes

Propriétés de la composition des transformations

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \;;\; (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Similitude plane

- Une similitude plane est une transformation du plan qui conserve les rapports de distances.

- Une transformation du plan est une similitude si et seulement si elle multiplie les distances par un réel k ($k > 0$). k est le rapport de la similitude.

Similitude directe

- Une similitude directe conserve les angles orientés.

- Si la similitude directe f n'est pas une translation, elle admet un unique point invariant Ω appelé **centre** de f.

- Soit f une similitude directe de rapport k et d'angle θ. Si f n'est pas une translation et a pour centre Ω, alors $f = h \circ r = r \circ h$, où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k et r la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Cette décomposition est appelée **forme réduite** de f.

- Soit A, B, A' et B' quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

Il existe une unique similitude directe f telle que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.

- Soit f une similitude directe de rapport k, d'angle θ et g une similitude directe de rapport k', d'angle θ'. Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des similitudes directes de rapport $k \cdot k'$ et d'angle $\theta + \theta'$. En général, $f \circ g$ est différente de $g \circ f$.

- Si f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k, d'angle θ alors sa réciproque f^{-1} est la similitude directe de même centre Ω, de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

Similitudes indirecte

- Une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

- Une similitude qui a deux points fixes distincts A et B ne peut être que l'identité ou la réflexion d'axe (AB).

Écritures complexes

- Écriture complexe d'une **translation** de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b,

$$z' = z + b.$$

- Écriture complexe d'une **homothétie** de centre Ω d'affixe ω et de rapport k non nul,

$$z' = k(z - \omega) + \omega.$$

- Écriture complexe d'une **rotation** de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ radians,

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

- Écriture complexe d'une **similitude directe** $z' = az + b$ ($a \neq 0$).

Pour tous complexes a et b ($a \neq 0$), $z' = az + b$ décrit une similitude directe de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta = \arg(a)$; on a alors : $z' = ke^{i\theta}z + b$.

- Écriture complexe d'une **similitude indirecte** $z' = a\bar{z} + b$ ($a \neq 0$).

Pour tous complexes a et b ($a \neq 0$), $z' = a\bar{z} + b$ décrit une similitude indirecte de rapport $k = |a|$.

Composée de similitudes

La composée de deux similitudes **indirectes** est une similitude **directe**. La réciproque d'une similitude **indirecte** est une similitude **indirecte**.

Déplacements et antidéplacements

- Les translations et les rotations sont les seules isométries directes, appelées **déplacements**.

- Les isométries indirectes sont appelés des **antidéplacements.**

- Un antidéplacement qui a au moins un point invariant est une réflexion.

D Sections planes

Cylindre

- Un cylindre **illimité** est obtenu par la rotation autour de son axe d'une droite parallèle à l'axe et située à une distance r appelé rayon. Chacune des droites obtenues est appelée **génératrice** du cylindre.

- Un cylindre d'axe (Oz) de rayon r est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que $x^2 + y^2 = r^2$ et $z \in \mathbb{R}$.

Section d'un cylindre par un plan P parallèle aux axes

- Si $\mathcal{P}$ est parallèle au plan de base et d'équation $z = k$, la section est un cercle contenu dans $\mathcal{P}$, de centre $(0\,;0\,;k)$ et de rayon r.

- Si $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz),

– si $d(\mathcal{P} ; (Oz)) > r$, l'intersection est vide ;

– si $d(\mathcal{P} ; (Oz)) = r$, la section est une droite parallèle à (Oz) ;

– si $d(\mathcal{P} ; (Oz)) < r$, la section est la réunion de deux droites parallèles à (Oz).

Cône

- Un cône illimité est obtenu par la rotation autour de son axe d'une droite sécante à son axe. Chacune des droites obtenues est appelée **génératrice** du cône.

- Un cône d'axe (Oz), de rayon r et de sommet $O(0 ; 0 ; 0)$ est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $x^2 + y^2 = m^2z^2$ et $z \in \mathbb{R}$, avec $m = \tan\alpha$ où α est l'angle entre l'axe et une génératrice.

Section d'un cône par un plan $\mathcal{P}$ parallèle aux axes

- Si $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (xOy) et d'équation $z = k$, la section est un cercle contenu dans $\mathcal{P}$, de centre $(0 ; 0 ; k)$ et de rayon $|mk|$.

- Si $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz), la section est une hyperbole.

Fonction de deux variables

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

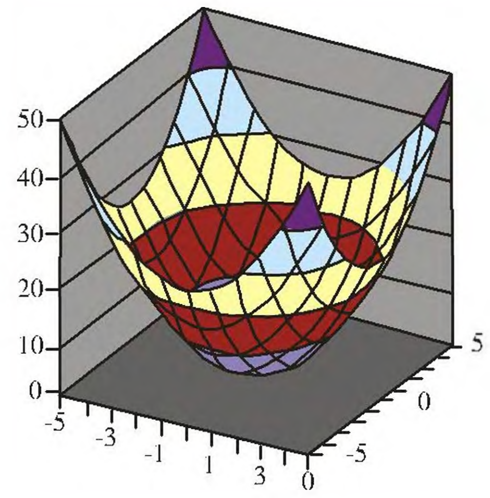
- Une **fonction de deux variables** est une fonction f qui, à un couple de réels $(x ; y)$, $x \in I$, $y \in J$, associe un réel, noté $f(x ; y)$.

- La **représentation graphique** d'un fonction de deux variables est la surface, ensemble des points M de coordonnées $(x ; y ; z)$ qui vérifient $z = f(x ; y)$, équation de la surface représentative de f.

- Étant donné une surface et un réel k fixé, on appelle ligne de niveau k la courbe obtenue par la section de la surface par le plan d'équation $z = k$.

Surfaces particulières

- La surface d'équation $z = x^2 + y^2$ est appelée un **paraboloïde de révolution**.
La section par un plan parallèle à l'axe (Oz) est une parabole. Les lignes de niveau sont des cercles.



- La surface d'équation $z = xy$ est appelée un **paraboloïde hyperbolique**.
La section par un plan parallèle à l'axe (Oz) est une parabole ou une droite. Les lignes de niveau non nulles sont des hyperboles.

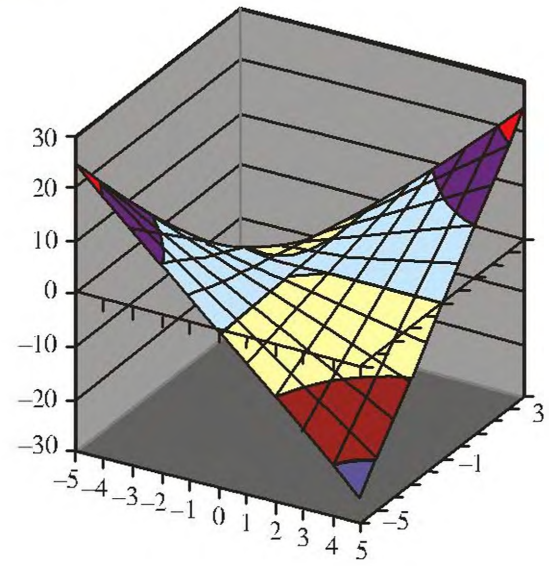


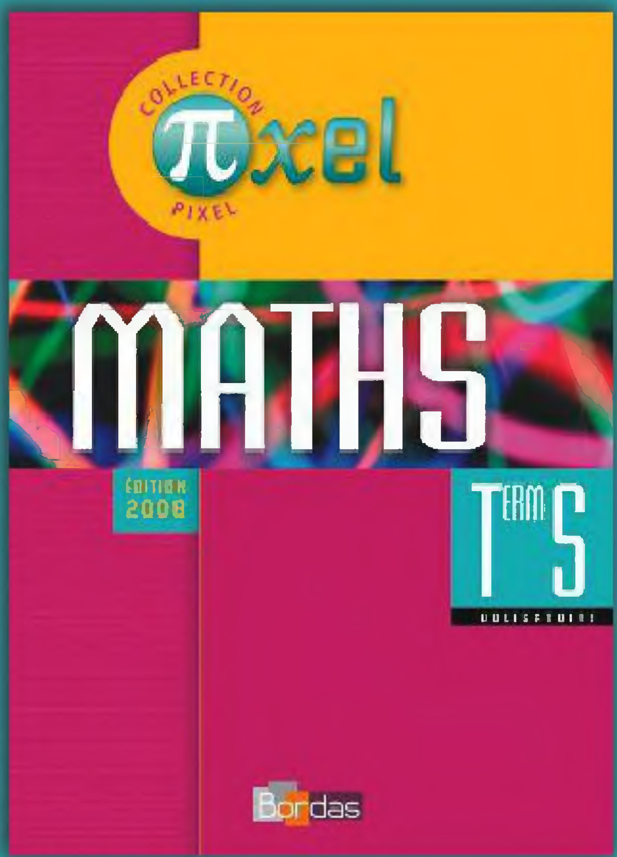
Table des nombres premiers

Table des nombres premiers de 2 à 2 267

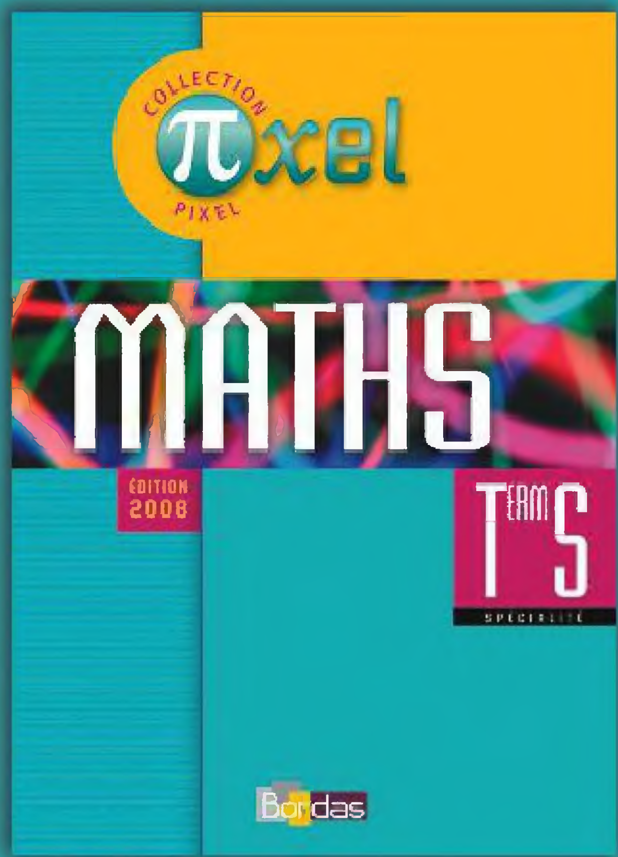
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997
1 009	1 013	1 019	1 021	1 031	1 033	1 039	1 049	1 051	1 061	1 063	1 069
1 087	1 091	1 093	1 097	1 103	1 109	1 117	1 123	1 129	1 151	1 153	1 163
1 171	1 181	1 187	1 193	1 201	1 213	1 217	1 223	1 229	1 231	1 237	1 249
1 259	1 277	1 279	1 283	1 289	1 291	1 297	1 301	1 303	1 307	1 319	1 321
1 327	1 361	1 367	1 373	1 381	1399	1 409	1 423	1 427	1 429	1 433	1 439
1 447	1 451	1 453	1 459	1 471	1 481	1 483	1 487	1 489	1 493	1 499	1 511
1 523	1 531	1 543	1 549	1 553	1 559	1 567	1 571	1 579	1 583	1 597	1 601
1 607	1 609	1 613	1 619	1 621	1 627	1 637	1 657	1 663	1 667	1 669	1 693
1 697	1 699	1 709	1 721	1 723	1 733	1 741	1 747	1 753	1 759	1 777	1 783
1 787	1 789	1 801	1 811	1 823	1 831	1 847	1 861	1867	1 871	1 873	1 877
1 879	1 889	1 901	1 907	1 913	1 931	1 933	1 949	1 951	1 973	1 979	1 987
1 993	1 997	1 999	2 003	2 011	2 017	2 027	2 029	2 039	2 053	2 063	2 069
2 081	2 083	2 087	2 089	2 099	2 111	2 113	2 129	2 131	2 137	2 141	2 143
2 153	2 161	2 179	2 203	2 207	2 213	2 221	2 237	2 239	2 243	2 251	2 267

N° éditeur : 10146294
Dépôt légal : avril 2008
Imprimé en Italie
par BONA

Pour la classe de Terminale S



Obligatoire



Spécialité

ISBN 978-2-04-732330-4

9 782047 323304

Env. 380 g

Bordas